Théorie KAM et EDP : solutions quasi-périodiques

Roulley Emeric
Professeur encadrant : Hmidi Taoufik

Table des matières

Résumé

La théorie KAM est une théorie perturbative de stabilité des solutions quasi-périodiques pour les systèmes hamiltoniens développée au milieu du XX$^{\text{ème}}$ siècle par Kolmogorov [Ko54], Arnold [Ar61] et Moser [Mo62]. Par la suite, d'autres chercheurs ont repris le flambeau et précisé la théorie. On pourra citer Nekhorochev, Féjos, Herman... D'autres encore, par la suite, ont repris leurs idées et les ont adaptées pour obtenir des résultats d'existence (et de stabilité) de solutions quasi-périodiques pour certaines EDP : Kuksin, Pöschel, Baldi, Berti etc...

Le but de ce stage a été de comprendre les idées fondamentales de cette théorie (le théorème de base pour les systèmes hamiltoniens en régularité analytique et le théorème de Nash-Moser), puis d'en voir quelques applications à l'existence de solutions quasi-périodiques de certaines EDP. La grande partie des références utilisées comme support de travail proviennent de l'école italienne.

A terme, en thèse, mon encadrant et moi-même tenterons d'utiliser les techniques présentées ici (et d'autres plus sophistiquées) afin d'obtenir un théorème d'existence de solutions quasi-périodiques à certaines EDP issues de la mécanique des fluides.

Je remercie Taoufik de m'offrir l'opportunité d'une thèse sous sa direction.

1 Théorie KAM

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. L'entier N représentera la (demi-)dimension de l'espace de travail.

1.1 Le théorème KAM classique

Définition 1.1. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$. On dit que f est quasi-périodique s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in \mathbb{R}^d$ et $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}^d} \in (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{Z}^d}$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d \backslash \{0\},\ \omega \cdot n \neq 0 \text{ et } \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \hat{f}_n e^{2i\pi t\omega\cdot n}.$$

Ou, de manière équivalente, s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in \mathbb{R}^d$ et $F : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^m$ 1-périodique en chaque coordonnée tels que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d \backslash \{0\},\ \omega \cdot n \neq 0 \text{ et } \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = F(\omega t).$$

Dans ce cas, on dit que f est quasi-périodique de vecteur fréquence ω.

Remarques :

- Le cas $d = 1$ donne le cas périodique. Ainsi l'ensemble des fonctions périodiques est inclus dans celui des fonctions quasi-périodiques.
- La condition sur ω est une condition de non-résonance disant que les coordonnées de ω ne doivent pas être rationnellement liées.
- On peut remplacer $\mathbb{R}^m$ par une variété M quelconque dans la définition précédente.

Définition 1.2. *Soit $\omega \in \mathbb{R}^d$. On dit que ω est fortement non-résonnant s'il existe $(L, \gamma) \in]0, 1] \times \mathbb{R}_+^*$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d \backslash \{0\}, |\langle\omega, n\rangle| \geqslant L|n|^{-\gamma}.$$

Dans ce cas, on dit que ω est de type (L, γ) et on note $\omega \in \mathcal{D}(L, \gamma)$.

Proposition 1.3. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $\gamma > d - 1$. Alors l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{L\in]0,1]} \mathcal{D}(L, \gamma)$ est de mesure pleine dans $\mathbb{R}^d$.*

On renvoie à [Be16] pour une preuve.

On considère un système hamiltonien en $2N$ variables associé à un hamiltonien H :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{p} = -\nabla_q H(p, q) \\ \dot{q} = \nabla_p H(p, q) \end{array} \right.$$

Définition 1.4. *L'hamiltonien H est dit Liouville-intégrable s'il existe $(F_j)_{1\leqslant j\leqslant N} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})^N$ tel que :*

- *$\forall j \in [\![1, N]\!], \{F_j, H\} = 0$ (i.e. les F_j sont des intégrales du mouvement).*
- *$\forall (j, k) \in [\![1, N]\!]^2, \{F_j, F_k\} = 0$ (i.e. les F_j sont en involution).*
- *$(\nabla_{p,q} F_j)_{1\leqslant j\leqslant N}$ est une famille libre.*

Théorème 1.5 (Arnold-Liouville). *On suppose que H est Liouville intégrable et qu'il existe $c \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ tel que l'ensemble $M_c = \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2N} / \forall j \in [\![1, N]\!], F_j(p, q) = c_j\}$ soit compact et connexe.*
Alors il existe un voisinage U de M_c, un voisinage D de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un changement de variables symplectique $\psi : \begin{array}{ccc} D \times \mathbb{T}^N & \to & U \\ (I, \phi) & \mapsto & (p, q) \end{array}$ tels que $H \circ \psi = h(I)$ est une fonction de la variable I seule. Et donc l'équation du mouvement devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I} = 0 \\ \dot{\phi} = \nabla_I h(I) := \omega(I) \end{array} \right.$$

Le système s'intègre alors facilement en donnant :

$$\forall t, \left\{ \begin{array}{l} I(t) = I(0) := I_0 \\ \phi(t) = \omega(I_0)t + \phi(0) \end{array} \right.$$

On voit alors que le mouvement vit dans le tore $\{I_0\} \times \mathbb{T}^N$ et est donné par le flot linéaire ϕ. On voit aussi que la nature du mouvement dépend de la nature arithmétique de $\omega(I_0)$.

On s'intéresse à une perturbation d'un système intégrable de la forme $H(I, \phi) = h(I) + f(I, \phi)$ (dans les variables actions-angles associées à l'hamiltonien (Liouville)-intégrable h). La question est de savoir s'il le mouvement vit toujours dans un tore. Une réponse positive fut apportée par le théorème suivant :

Théorème 1.6 (KAM classique)**.** *Soit $L \in]0,1]$. Soit $\gamma > n-1$. Soit $\sigma > 0$. Soit $\rho > 0$. On suppose que $\omega(I^*) = \omega^* \in \mathcal{D}(L,\gamma)$. On suppose que H, h et f sont analytiques réelles sur le domaine $\mathcal{A}_{\sigma,\rho}(I^*) = \{(I,\phi) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N / |I - I^*| < \rho$ et $\forall j \in [\![1,N]\!], |Im(\phi_j)| < \sigma\}$. On suppose le système non-dégénéré, i.e. l'application fréquence $I \mapsto \omega(I) = \nabla h(I)$ est un difféomorphisme local ce qui sera assuré par le fait que la hessienne $\nabla^2 h$ soit inversible au voisinage de I^*.*
Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si $\| f \|_{\sigma,\rho} := \sup_{(I,\phi)\in\mathcal{A}_{\sigma,\rho}} |f(I,\phi)| < \varepsilon_0$ alors le système H admet (au moins) une solution quasi-périodique de vecteur fréquence ω^*.

1.2 Preuve du théorème KAM classique

On suit ici le papier de C. E. Wayne [W08] en y apportant quelques compléments et quelques modifications.

Idée générale de la preuve :
On souhaite obtenir une solution quasi-périodique du système perturbé. On remarque que la recherche d'une solution quasi-périodique équivaut à la recherche d'un zéro d'une certaine fonction. L'idée est donc d'appliquer un algorithme de Newton. A chaque étape, on doit linéariser le système et le résoudre via Fourier. C'est à ce moment qu'apparaissent les "petits diviseurs" traduisant une perte de régularité que l'on contrôle par des conditions diophantiennes. Afin de reconstruire la solution, on doit sommer. La convergence extrêmement rapide de l'algorithme de Newton va compenser la perte de régularité et permettre de récupérer une solution non-triviale.

1.2.1 Interlude sur les changements de variables symplectiques par fonctions génératrices

Soit $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2N} & \to & \mathbb{R}^{2N} \\ (\widetilde{I},\widetilde{\phi}) & \mapsto & (I,\phi) \end{array}$ un changement de variables symplectique.
La forme différentielle $Id\phi + \widetilde{\phi}d\widetilde{I}$ est fermée :

$$d(Id\phi + \widetilde{\phi}d\widetilde{I}) = dI \wedge d\phi + d\widetilde{\phi} \wedge d\widetilde{I} = dI \wedge d\phi - d\widetilde{I} \wedge d\widetilde{\phi} = 0.$$

La première égalité vient du fait que la différentielle extérieure est une antidérivation qui vérifie $d^2 = 0$. La seconde égalité vient de l'antisymétrie du produit extérieur $\wedge$. La dernière égalité vient du fait que comme Φ est symplectique, elle conserve la forme volume.
On en déduit du lemme de Poincaré ($\mathbb{R}^{2N}$ étant étoilé) que cette forme différentielle est exacte : il existe $\Sigma \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$ (fonction des variables $\widetilde{I}$ et ϕ définie localement sous de bonnes hypothèses de non-dégénérescence cf. [AA67, Appendice 32]) telle que

$$Id\phi + \widetilde{\phi}d\widetilde{I} = d\Sigma.$$

On en déduit que

$$\boxed{I = \frac{\partial\Sigma}{\partial\phi}(\widetilde{I},\phi) \text{ et } \widetilde{\phi} = \frac{\partial\Sigma}{\partial\widetilde{I}}(\widetilde{I},\phi)} \quad (\star)$$

Définition 1.7. *La fonction Σ est appelée la fonction génératrice de la transformation symplectique Φ.*

Remarques :

- On vérifie aisément que la fonction génératrice de l'identité est le produit scalaire sur $\mathbb{R}^N$: $\Sigma(\widetilde{I},\phi) = \langle\widetilde{I},\phi\rangle$.
- Si le changement de variables Φ est "proche" de l'identité, alors $(\star)$ implique que Σ l'est aussi, i.e. il existe $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2N},\mathbb{R})$ telle que $\Sigma(\widetilde{I},\phi) = \langle\widetilde{I},\phi\rangle + S(\widetilde{I},\phi)$. On dit alors par abus de langage que S est la fonction génératrice de la transformation symplectique Φ. Dans ce cas, $(\star)$ devient :

$$\boxed{I = \widetilde{I} + \frac{\partial S}{\partial\phi}(\widetilde{I},\phi) \text{ et } \widetilde{\phi} = \phi + \frac{\partial S}{\partial\widetilde{I}}(\widetilde{I},\phi)}$$

1.2.2 Analyse du linéarisé

On suppose qu'il existe un changement de variables symplectique $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2N} & \to & \mathbb{R}^{2N} \\ (\widetilde{I},\widetilde{\phi}) & \mapsto & (I,\phi) \end{array}$ de fonction génératrice Σ tel que

$$h(\frac{\partial\Sigma}{\partial\phi}(\widetilde{I},\phi)) + f(\frac{\partial\Sigma}{\partial\phi}(\widetilde{I},\phi),\phi) = H(\frac{\partial\Sigma}{\partial\phi}(\widetilde{I},\phi),\phi) = H(I,\phi) = H\circ\Phi(\widetilde{I},\widetilde{\phi}) = \widetilde{h}(\widetilde{I}).$$

En faisant un DL à l'ordre 1 (en négligeant les termes d'ordres supérieurs), on obtient :

$$\langle\omega(\widetilde{I}),\frac{\partial S}{\partial\phi}(\widetilde{I},\phi))\rangle+f(\widetilde{I},\phi)=\widetilde{h}(\widetilde{I})-h(\widetilde{I}).$$

Si on regarde l'équation homogène, on trouve ce que l'on appelle l'équation homologique :

$$\langle\omega(\widetilde{I}),\frac{\partial S}{\partial\phi}(\widetilde{I},\phi))\rangle+f(\widetilde{I},\phi)=0$$

et qu'on la résout en Fourier, on trouve

$$S(\widetilde{I},\phi)=\frac{i}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}^N\setminus\{0\}}\frac{\hat{f}(\widetilde{I},k)e^{2i\pi\langle\phi,k\rangle}}{\langle\omega(\widetilde{I}),k\rangle}.$$

Problème : La série est-elle bien définie ?

Lemme 1.8. *Soit $f\in\mathcal{C}_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (fonction continue 1-périodique), alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) il existe $\sigma>0$ tel que f se prolonge en une fonction analytique sur $H_\sigma=\{z\in\mathbb{C}/|Im(z)|<\sigma\}$.
(2) $\exists C>0,\forall k\in\mathbb{Z},|\hat{f}(k)|\lesssim e^{-C|k|}$.

Preuve :

• (1)⇒(2) : On note toujours f le prolongement analytique de f à H_σ. Comme f est en particulier de classe $\mathcal{C}^\infty$, on a par les propriétés classiques sur les coefficients de Fourier :

$$\forall k\in\mathbb{Z},\forall p\in\mathbb{N},|\hat{f}(k)|\leqslant\frac{|\widehat{f^{(p)}}(k)|}{|2\pi k|^p}\leqslant\frac{\|f^{(p)}\|_\infty}{|2\pi k|^p}.$$

Or, d'après les inégalités de Cauchy pour les fonctions holomorphes, on a en posant $\|f\|_\sigma=\sup\{|f(z)|/z\in H_\sigma\}$:

$$\forall p\in\mathbb{N},\forall r\in]0,\sigma[,\forall x\in\mathbb{R},|f^{(p)}(x)|\leqslant\frac{p!}{r^p}\max\{|f(z)|/|z-x|=r\}\leqslant\frac{p!}{r^p}\|f\|_\sigma.$$

En prenant $r=\frac{\sigma}{2}$, on obtient :

$$\forall k\in\mathbb{Z},|\hat{f}(k)|\leqslant\frac{p!2^p}{|2\pi k|^p\sigma^p}\|f\|_\sigma\leqslant\left(\frac{p}{\sigma\pi|k|}\right)^p\|f\|_\sigma=\|f\|_\sigma\exp\left(p\ln\left(\frac{p}{\sigma\pi|k|}\right)\right).$$

A $k\in\mathbb{Z}$ fixé, on optimise en p en prenant $p=[\frac{\sigma\pi|k|}{e}]$, ce qui donne :

$$p\ln\left(\frac{p}{\sigma\pi|k|}\right)\leqslant p\ln(e^{-1})=-p\leqslant 1-\frac{\sigma\pi|k|}{e}.$$

Puis

$$\boxed{|\hat{f}(k)|\leqslant\|f\|_\sigma\, e\exp\left(-\frac{\sigma\pi|k|}{e}\right)}\ (\star)$$

D'où le résultat avec $C=\frac{\sigma\pi}{e}$ et e pour constante multiplicative.

• (2)⇒(1) : La condition (2) implique que la série de Fourier de f converge normalement et que donc f est la somme de sa série de Fourier :

$$\forall x\in\mathbb{R},f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)e^{2i\pi kx}.$$

On considère la fonction F de la variable complexe z définie par :

$$F(z)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)e^{2i\pi kz}.$$

On pose $\sigma=\frac{C}{2\pi}$. Soit K un compact de H_σ. On pose $r=\max\{|\mathrm{Im}(z)|/z\in K\}<\sigma$. Alors par hypothèse (2), on a :

$$\forall z\in K,\forall k\in\mathbb{Z},|\hat{f}(k)e^{2i\pi kz}|=|\hat{f}(k)|e^{2\pi|k||\mathrm{Im}(z)|}\lesssim e^{-(C-2\pi r)|k|}.$$

On en déduit que la série de fonctions donnée par F converge normalement (donc uniformément) sur tout compact de H_σ. Donc, d'après le théorème de Weierstrass des suites/séries de fonctions holomorphes, on en déduit que F est une fonction holomorphe sur H_σ qui coïncide avec f sur $\mathbb{R}$.

Remarque : On admet que ce lemme se généralise aux fonctions de plusieurs variables. La formule $(\star)$ devenant pour une fonction $f : \mathbb{T}^N \to \mathbb{C}$ se prolongeant en une fonction analytique sur un ouvert H_σ pour un certain $\sigma > 0$ défini par $H_\sigma = \{\phi \in \mathbb{C}^N / \forall j \in [\![1, N]\!], |\mathrm{Im}(\phi_j)| < \sigma\}$:

$$\boxed{\exists C > 0, \forall k \in \mathbb{Z}^N, |\hat{f}(k)| \lesssim \| f \|_\sigma e^{-C\sigma|k|}}$$

Comme l'estimation fait apparaître une exponentielle décroissante, on peut supposer sans perte de généralité que $C \leqslant 2\pi$.
On définit pour un $M > 0$ fixé :

$$S^<(\widetilde{I}, \phi) = \frac{i}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}, |k| \leqslant M} \frac{\hat{f}(\widetilde{I}, k) e^{2i\pi\langle \phi, k\rangle}}{\langle \omega(\widetilde{I}), k\rangle}.$$

Dans ce qui suit $|\cdot|$ désignera tantôt un module et tantôt une norme 1 et $\|\cdot\|$ le sup des normes 1 du vecteur évalué en les paramètres.

Proposition 1.9. *Soit $\delta \in]0, \frac{C\sigma}{2\pi}[$. Soit $M \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\rho < \frac{L}{2\Omega M^{\gamma+1}}$.*
Alors $S^<$ est analytique sur $\mathcal{A}_{\frac{C\sigma}{2\pi} - \delta, \rho}$ et il existe $\widetilde{C} = \widetilde{C}(N, \gamma, L)$ telle que

$$\| S^< \|_{\frac{C\sigma}{2\pi} - \delta, \rho} \leqslant \widetilde{C} \frac{\| f \|_{\sigma, \rho}}{\delta^{\gamma+N+1}}.$$

Remarque : Cette proposition signifie que l'on perd un peut en régularité au sens où le domaine d'analyticité se rétrécit. C'est ici qu'apparait la nécessité des conditions diophantiennes pour contrôler la régularité.

Preuve :
Soit $(I, \phi) \in \mathcal{A}_{\frac{C\sigma}{2\pi} - \delta, \rho}(I^*)$.
• On a par inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité des accroissements finis et équivalence des normes :

$$\forall k \in \mathbb{Z}^N, |\langle \omega(I) - \omega^*, k\rangle| \leqslant \| \frac{\partial^2 h}{\partial I^2} \| \, |I - I^*||k| \leqslant \Omega\rho|k|.$$

On en déduit par hypothèse sur ρ que pour tout $k \in \mathbb{Z}^N$ tel que $|k| \leqslant M$, on a :

$$|\langle \omega(I), k\rangle| = |\langle \omega^*, k\rangle + (\langle \omega(I), k\rangle - \langle \omega^*, k\rangle)| \geqslant \frac{L}{|k|^\gamma} - \Omega\rho|k| \geqslant \frac{L}{2|k|^\gamma}$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire gauche et l'estimation précédente pour la première inégalité.
• On peut donc aboutir à :

$$\begin{aligned}
|S^<(\widetilde{I}, \phi)| &\leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}, |k| \leqslant M} \frac{|\hat{f}(\widetilde{I}, k)||e^{2i\pi\langle k, \phi\rangle}|}{2\pi|\langle \omega(\widetilde{I}), k\rangle|} \\
&\lesssim \frac{1}{\pi L} \| f \|_{\sigma,\rho} \sum_{k \in \mathbb{Z}^N, |k| \leqslant M} |k|^\gamma e^{-C\sigma|k|} e^{2\pi\left(\frac{C\sigma}{2\pi} - \delta\right)|k|} \\
&= \frac{1}{\pi L} \| f \|_{\sigma,\rho} \sum_{m=0}^{M} m^\gamma e^{-2\pi\delta m} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^N, |k| = m} 1 \right) \\
&\lesssim \frac{1}{\pi L} \| f \|_{\sigma,\rho} \sum_{m=0}^{M} m^{\gamma+N} e^{-2\pi\delta m} \\
&\leqslant \frac{1}{\pi L} \| f \|_{\sigma,\rho} \int_0^{+\infty} t^{\gamma+N} e^{-2\pi\delta t} dt \\
&= \frac{1}{\pi L (2\pi\delta)^{\gamma+N+1}} \Gamma(\gamma + N + 1) \| f \|_{\sigma,\rho}
\end{aligned}$$

La première inégalité est obtenue par inégalité triangulaire. La seconde provient de l'estimation du premier point, du lemme précédent et du choit de ϕ. La troisième estimation vient d'une borne grossière sur le cardinal de l'intersection entre le réseau $\mathbb{Z}^N$ et la sphère de centre 0 et de rayon m pour la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^N$. La dernière inégalité vient d'une comparaison série-intégrale. Enfin, la dernière égalité est obtenue après un changement de variable affine dans l'intégrale.
D'où le résultat par passage au sup.

Proposition 1.10. *Soit $\delta \in]0, \frac{C\sigma}{2\pi}[$. Soit $M \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\rho < \dfrac{L}{2\Omega M^{\gamma+1}}$ et $\dfrac{8\widetilde{C}N \parallel f \parallel_{\sigma,\rho}}{\delta\rho\delta^{\gamma+N+1}} < 1$. Alors le changement de variable symplectique Φ engendré par $S^<$ est analytique de $\mathcal{A}_{\frac{C\sigma}{2\pi}-3\delta,\frac{\rho}{4}}(I^*)$ sur $\mathcal{A}_{\frac{C\sigma}{2\pi}-2\delta,\frac{\rho}{2}}(I^*)$.*

Preuve :
Soit $(\widetilde{I},\phi) \in \mathcal{A}_{\frac{C\sigma}{2\pi}-2\delta,\frac{\rho}{4}}(I^*)$.
On rappelle que la changement de variables symplectique Φ est défini par

$$I = \widetilde{I} + \frac{\partial S^<}{\partial \phi}(\widetilde{I},\phi) \text{ et } \widetilde{\phi} = \phi + \frac{\partial S^<}{\partial \widetilde{I}}(\widetilde{I},\phi).$$

• Φ définit un changement de variable biholomorphe si, par théorème d'inversion analytique $\parallel \frac{\partial^2 S^<}{\partial \widetilde{I}\partial\phi} \parallel_{\frac{C\sigma}{2\pi}-2\delta,\frac{\rho}{2}} < 1$. Pour cela, pour tout $(j,k) \in [\![1,N]\!]^2$, on applique la formule de Cauchy pour la fonction partielle holomorphe $S^<(\widetilde{I_1},...,\widetilde{I_{j-1}},\cdot,\widetilde{I_{j+1}},...,\widetilde{I_N},\phi_1,...,\phi_{k-1},\cdot,\phi_{k+1},...,\phi_N)$ en les deux variables $\widetilde{I_j}$ et ϕ_k le long du chemin $\Gamma_{j,k}$ défini par $\forall (t,t') \in [0,2\pi]^2, \Gamma_{j,k}(t,t') = (\widetilde{I_j} + \frac{\rho}{4}e^{it}, \phi_k + \delta e^{it'})$. Comme, par choix de $\widetilde{I}$, $|\widetilde{I_j} - I_j^*| \leqslant |\widetilde{I} - I^*| < \frac{\rho}{4}$, alors $|\Pi_1\Gamma_{j,k}(t,t') - I_j^*| < \frac{\rho}{2}$ et comme par choix de ϕ, $|\mathrm{Im}(\phi_k)| < \frac{C\sigma}{2\pi} - 2\delta$, alors $|\mathrm{Im}(\Pi_2\Gamma_{j,k}(t,t'))| < \frac{C\sigma}{2\pi} - \delta$ (où on a noté, pour $i \in \{1,2\}$, Π_i la projection en la $i^{\text{ème}}$ coordonnée).

$$\begin{aligned}
|\frac{\partial^2 S^<}{\partial \widetilde{I_j}\partial\phi_k}(\widetilde{I},\phi)| &= |\frac{2}{(2i\pi)^2}\int_{\Gamma_{j,k}} \frac{S^<(\widetilde{I_1},...\widetilde{I_{j-1}},\xi,\widetilde{I_{j+1}},...\widetilde{I_N}\phi_1,...,\phi_{k-1},\eta,\phi_{k+1},...,\phi_N)}{(\xi-\widetilde{I_j})^2(\eta-\phi_k)^2}d\xi d\eta| \\
&\leqslant \frac{8 \parallel S^< \parallel_{\frac{C\sigma}{2\pi}-\delta,\rho}}{\delta\rho} \\
&\leqslant 8\widetilde{C}\frac{\parallel f \parallel_{\sigma,\rho}}{\delta^{\gamma+N+1}}\frac{1}{\delta\rho}
\end{aligned}.$$

On en déduit que

$$|\frac{\partial^2 S^<}{\partial \widetilde{I}\partial\phi}(\widetilde{I},\phi)| = \max_{k\in[\![1,N]\!]}\left(\sum_{j=1}^{N}|\frac{\partial^2 S^<}{\partial \widetilde{I_j}\partial\phi_k}(\widetilde{I},\phi)|\right) \leqslant 4N\widetilde{C}\frac{\parallel f \parallel_{\sigma,\rho}}{\delta^{\gamma+N+1}}\frac{1}{\delta\rho} < 1.$$

D'où par passage au sup, il vient :

$$\parallel \frac{\partial^2 S^<}{\partial \widetilde{I}\partial\phi} \parallel_{\frac{C\sigma}{2\pi}-2\delta,\frac{\rho}{2}} < 1.$$

• Soit $j \in [\![1,N]\!]$. On applique la formule de Cauchy pour la fonction partielle holomorphe $S^<(\widetilde{I},\phi_1,...,\phi_{j-1},\cdot,\phi_{j+1},...,\phi_N)$ en la variable ϕ_j le long du chemin $\Gamma_{\widetilde{I},j}$ défini par $\forall t \in [0,2\pi], \Gamma_{\widetilde{I},j}(t) = \phi_j + \delta e^{it}$. Comme, par choix de ϕ, $|\mathrm{Im}(\phi_j)| < \frac{C\sigma}{2\pi} - 2\delta$, alors $|\mathrm{Im}(\Gamma_{\widetilde{I},j}(t))| < \frac{C\sigma}{2\pi} - \delta$. On a donc :

$$\begin{aligned}
|\frac{\partial S^<}{\partial \phi_j}(\widetilde{I},\phi)| &= |\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma_{\widetilde{I},j}} \frac{S^<(\widetilde{I},\phi_1,...,\phi_{j-1},\xi,\phi_{j+1},...,\phi_N)}{(\xi-\phi_j)^2}d\xi| \\
&\leqslant \frac{\parallel S^< \parallel_{\frac{C\sigma}{2\pi}-\delta,\frac{\rho}{2}}}{\delta} \\
&\leqslant \frac{\parallel S^< \parallel_{\frac{C\sigma}{2\pi}-\delta,\rho}}{\delta} \\
&\leqslant \widetilde{C}\frac{\parallel f \parallel_{\sigma,\rho}}{\delta^{\gamma+N+1}}\frac{1}{\delta}
\end{aligned}.$$

On en déduit que :

$$|\frac{\partial S^<}{\partial \phi}(\widetilde{I},\phi)| = \sum_{j=1}^{N}|\frac{\partial S^<}{\partial \phi_j}(\widetilde{I},\phi)| \leqslant \widetilde{C}\frac{\parallel f \parallel_{\sigma,\rho}}{\delta^{\gamma+N+1}}\frac{N}{\delta} < \frac{\rho}{8}.$$

D'où par passage au sup, il vient :

$$\parallel \frac{\partial S^<}{\partial \phi} \parallel_{\frac{C\sigma}{2\pi}-2\delta,\frac{\rho}{2}} < \frac{\rho}{8}.$$

De même, en appliquant la formule de Cauchy pour la fonction partielle holomorphe $S^<(\widetilde{I_1},...,\widetilde{I_{j-1}},\cdot,\widetilde{I_{j+1}},...,\widetilde{I_N},\phi)$ en la variable $\widetilde{I_j}$ le long du chemin $\Gamma_{\phi,j}$ défini par $\forall t \in [0,2\pi], \Gamma_{\phi,j}(t) = \widetilde{I_j} + \frac{\rho}{4}e^{it}$. Comme, par choix de $\widetilde{I}$, $|\widetilde{I_j} - I_j^*| \leqslant |\widetilde{I} - I^*| < \frac{\rho}{4}$, alors $|\Gamma_{\phi,j}(t) - I_j^*| < \frac{\rho}{2}$. On a donc :

$$\parallel \frac{\partial S^<}{\partial \widetilde{I}} \parallel_{\frac{C\sigma}{2\pi}-\delta,\frac{\rho}{2}} \leqslant \widetilde{C}\frac{\parallel f \parallel_{\sigma,\rho}}{\delta^{\gamma+N+1}}\frac{4N}{\rho} < \frac{\delta}{2}.$$

On en déduit que $|I-\widetilde{I}|\leqslant\frac{\rho}{8}$ et $|\phi-\widetilde{\phi}|\leqslant\frac{\delta}{2}$. D'où

$$|I-I^*|\leqslant|I-\widetilde{I}|+|\widetilde{I}-I^*|<\frac{\rho}{4}+\frac{\rho}{8}=\frac{3\rho}{8}<\frac{\rho}{2}.$$

Et pour tout $j\in[\![1,N]\!]$, si $(\widetilde{I},\widetilde{\phi})\in\mathcal{A}_{\frac{C\sigma}{2\pi}-3\delta,\frac{\rho}{4}}$, alors en particulier, on a :

$$|\mathrm{Im}(\phi_j)|<|\mathrm{Im}(\widetilde{\phi_j})|+\frac{\delta}{2}<\frac{C\sigma}{2\pi}-3\delta+\frac{\delta}{2}<\frac{C\sigma}{2\pi}-2\delta.$$

D'où Φ envoie $\mathcal{A}_{\frac{C\sigma}{2\pi}-3\delta,\frac{\rho}{4}}(I^*)$ sur $\mathcal{A}_{\frac{C\sigma}{2\pi}-2\delta,\frac{\rho}{2}}(I^*)$.

1.2.3 Itération

a)La brique élémentaire

Proposition 1.11. *Soit Φ le changement de variable symplectique de fonction génératrice $S^<$. On pose*

$$\widetilde{H}(\widetilde{I},\widetilde{\phi})=H\circ\Phi(\widetilde{I},\widetilde{\phi}):=\widetilde{h}(\widetilde{I})+\widetilde{f}(\widetilde{I},\widetilde{\phi})$$

avec $\widetilde{f}(\widetilde{I},\cdot)$ de moyenne nulle.
Alors il existe $C_1=C_1(\gamma,N,L,\Omega,\delta)$ et $C_2=C_2(\gamma,N,L,\Omega,\delta)$ telles que

$$\parallel h-\widetilde{h}\parallel_{\frac{C\sigma}{2\pi}-3\delta,\frac{\rho}{4}}\leqslant C_1\parallel f\parallel^2_{\sigma,\rho}$$

et

$$\parallel\widetilde{f}\parallel_{\frac{C\sigma}{2\pi}-3\delta,\frac{\rho}{4}}\leqslant C_2\parallel f\parallel^2_{\sigma,\rho}\ .$$

Remarque : Il est primordial que l'erreur commise soit quadratique (ou du moins géométrique, i.e. erreur à une puissance plus grande que 1) en la perturbation pour que le schéma de Newton puisse se mettre en place.

Preuve :
On écrit la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 (resp. 0) pour h (resp. f) en la première variable au point $\widetilde{I}$ avec pour perturbation $\frac{\partial S^<}{\partial\phi}(\widetilde{I},\phi)$ (notée simplement $\frac{\partial S^<}{\partial\phi}$ par commodité d'écriture) :

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}(\widetilde{I},\widetilde{\phi}) &= H\left(\widetilde{I}+\tfrac{\partial S^<}{\partial\phi},\phi\right)\\
&= h\left(\widetilde{I}+\tfrac{\partial S^<}{\partial\phi}\right)+f(\widetilde{I}+\tfrac{\partial S^<}{\partial\phi},\phi)\\
&= h(\widetilde{I})+\langle\omega(\widetilde{I}),\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\rangle+\int_0^1(1-t)\langle\frac{\partial\omega}{\partial I}\left(\widetilde{I}+t\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\right)\frac{\partial S^<}{\partial\phi},\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\rangle dt+f(\widetilde{I},\phi)+\int_0^1\langle\frac{\partial f}{\partial I}\left(\widetilde{I}+t\frac{\partial S^<}{\partial\phi},\phi\right),\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\rangle dt\\
&= h(\widetilde{I})+\int_0^1(1-t)\langle\frac{\partial\omega}{\partial I}\left(\widetilde{I}+t\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\right)\frac{\partial S^<}{\partial\phi},\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\rangle dt+f^{\geqslant}(\widetilde{I},\phi)+\int_0^1\langle\frac{\partial f}{\partial I}\left(\widetilde{I}+t\frac{\partial S^<}{\partial\phi},\phi\right),\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\rangle dt
\end{aligned}$$

La simplification *bleue* provient de la définition de $S^<$ comme solution de l'équation de Hamilton-Jacobi. On a posé $f^{\geqslant}(\widetilde{I},\phi)=\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}^N,|k|\geqslant M}\hat{f}(\widetilde{I},k)e^{2i\pi\langle\phi,k\rangle}$.

Il nous faut écrire cette expression sous la forme $\widetilde{H}(\widetilde{I},\widetilde{\phi})=\widetilde{h}(\widetilde{I})+\widetilde{f}(\widetilde{I},\widetilde{\phi})$ avec $\widetilde{f}(\widetilde{I},\cdot)$ de moyenne nulle. Avec l'expression ci-dessus, cela n'est pas assuré. Qu'à cela ne tienne, on y va en force en utilisant le "belgium trick". On pose donc :

$$\left\{\begin{aligned}
\widetilde{h}(\widetilde{I}) &= h(\widetilde{I})+\fint\int_0^1(1-t)\langle\frac{\partial\omega}{\partial I}\left(\widetilde{I}+t\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\right)\frac{\partial S^<}{\partial\phi},\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\rangle dt+\fint\int_0^1\langle\frac{\partial f}{\partial I}\left(\widetilde{I}+t\frac{\partial S^<}{\partial\phi},\phi\right),\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\rangle dt+\fint f(\widetilde{I},\phi(\widetilde{I},\cdot))\\
\widetilde{f}(\widetilde{I},\widetilde{\phi}) &= \int_0^1(1-t)\langle\frac{\partial\omega}{\partial I}\left(\widetilde{I}+t\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\right)\frac{\partial S^<}{\partial\phi},\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\rangle dt+\int_0^1\langle\frac{\partial f}{\partial I}\left(\widetilde{I}+t\frac{\partial S^<}{\partial\phi},\phi\right),\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\rangle dt+f^{\geqslant}(\widetilde{I},\phi)\\
&\quad-\fint\int_0^1(1-t)\langle\frac{\partial\omega}{\partial I}\left(\widetilde{I}+t\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\right)\frac{\partial S^<}{\partial\phi},\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\rangle dt-\fint\int_0^1\langle\frac{\partial f}{\partial I}\left(\widetilde{I}+t\frac{\partial S^<}{\partial\phi},\phi\right),\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\rangle dt-\fint f(\widetilde{I},\phi(\widetilde{I},\cdot))
\end{aligned}\right.$$

avec la notation $\fint g(\widetilde{I},\cdot)=\int_{\mathbb{T}^N}g(\widetilde{I},\widetilde{\phi})d\widetilde{\phi}$. En utilisant la preuve de la proposition précédente, l'inégalité triangulaire, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'équivalence des normes en dimension finie, il vient :

$$\parallel\int_0^1(1-t)\langle\frac{\partial\omega}{\partial I}\left(\widetilde{I}+t\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\right)\frac{\partial S^<}{\partial\phi},\frac{\partial S^<}{\partial\phi}\rangle dt\parallel_{\frac{C\sigma}{2\pi}-3\delta,\frac{\rho}{4}}\lesssim\frac{\Omega\widetilde{C}^2\parallel f\parallel^2_{\sigma,\rho}}{\delta^{2(\gamma+N+1)}}.$$

De même, via l'utilisation de la formule de Cauchy pour la fonction f comme dans la preuve précédente, il vient :

$$\| \int_0^1 \langle \frac{\partial f}{\partial I}\left(\widetilde{I}+t\frac{\partial S^<}{\partial \phi},\phi\right), \frac{\partial S^<}{\partial \phi}\rangle dt \|_{\frac{C\sigma}{2\pi}-3\delta,\frac{\rho}{4}} \lesssim \frac{4 \| f \|_{\sigma,\rho}}{\rho}\frac{\| f \|_{\sigma,\rho}}{\delta^{\gamma+N+1}}.$$

Enfin,

$$\| f^{\geqslant} \|_{\frac{C\sigma}{2\pi}-3\delta,\frac{\rho}{4}} \lesssim \| f \|_{\sigma,\rho} \sum_{|k|\geqslant M} e^{-6\pi\delta|k|} \lesssim \| f \|_{\sigma,\rho}\, e^{-5\pi\delta M} \sum_{m=M}^{+\infty} m^N e^{-\pi\delta m} \leqslant \| f \|^2_{\sigma,\rho} \frac{\Gamma(N+1)}{(\pi\delta)^{N+1}}.$$

En choisissant $M = \frac{|\ln(\|f\|_{\sigma,\rho})|}{5\pi\delta}$. D'où le résultat en regroupant tous les termes.

b)La récurrence Il importe de bien choisir les constantes à chaque étape. On pose donc :

- $\forall n \in \mathbb{N}, \delta_n = \frac{1}{1+n^2}$,
- $\sigma_0 = \frac{C\sigma}{2\pi}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \sigma_{n+1} = \sigma_n - 4\delta_n$,
- $\rho_0 \leqslant \rho$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_{n+1} = \frac{\rho_n}{8}$,
- $\varepsilon_0 = \| f \|_{\sigma,\rho}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \varepsilon_n = \varepsilon_0^{\frac{3}{2}^{\frac{n}{\gamma}}}$,
- $\forall n \in \mathbb{N}, M_n = \frac{|\ln(\|f\|_{\sigma,\rho})|}{5\pi\delta_n}$.

Remarques :

- Le choix de $\delta_n \left(= O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ est fait pour que la série télescopique associée à la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente afin que la suite elle-même soit convergente et ainsi éviter d'obtenir un domaine vide d'analyticité au final.
- Le choix du 4 devant le δ_n à la place du 3 qui apparaissait précédemment vient d'une nouvelle utilisation de la formule de Cauchy par la suite (cf. paragraphe "c)Conclusion").

On considère le schéma itératif $H_{n+1} = H_n \circ \Phi_n = h_{n+1} + f_{n+1}$ où $f_{n+1}(I,\cdot)$ est de moyenne nulle, i.e. $\hat{f}_{n+1}(I,0) = 0$ et Φ_n est la transformation symplectique de fonction génératrice $S_n^<$ satisfaisant à l'équation

$$\langle \omega_n(\widetilde{I}), \frac{\partial S_n^<}{\partial \phi}(\widetilde{I},\phi))\rangle + f_n^<(\widetilde{I},\phi) = 0$$

où $f_n^<(\widetilde{I},\phi) = \sum_{|k|\leqslant M_n} \hat{f}_n(\widetilde{I},k)e^{2i\pi\langle\phi,k\rangle}$ et $\omega_n(\widetilde{I}) = \frac{\partial h_n}{\partial I}(\widetilde{I})$.

L'idée est de composer par les Φ_n pour "rétrécir" la perturbation f_n et obtenir asymptotiquement un hamiltonien intégrable :

$$H_n(I,\phi) = h_n(I) + f_n(I,\phi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} h_\infty(I).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit $I_n \in \mathbb{C}^N$ tel que $\omega_n(I_n) = \omega^*$. On peut toujours choisir un tel I_n par théorème d'inversion locale (les hypothèses étant satisfaites car h_n est de plus en plus proche de h à mesure que n croît et h est supposé non dégénéré à l'ordre 2). On considère le domaine d'analyticité

$$\mathcal{A}_{\sigma_n,\rho_n}(I_n) = \{(I,\phi \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N)/|I-I_n| < \rho_n \text{ et } \forall j \in [\![1,N]\!], |\mathrm{Im}(\phi_j)| < \sigma_n\}.$$

Proposition 1.12 (récurrence)**.** *On suppose , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

- $\| S_n^< \|_{\sigma_n-\delta_n,\rho_n} \lesssim \varepsilon_n$.
- Φ_n *définit un changement de variables analytique de* $\mathcal{A}_{\sigma_n-3\delta_n,\frac{\rho_n}{4}}(I_n)$ *sur* $\mathcal{A}_{\sigma_n-2\delta,\frac{\rho_n}{2}}(I_n)$.
- $\| f_{n+1} \|_{\sigma_{n+1},\rho_{n+1}} \leqslant \varepsilon_{n+1}$.
- $\| h_{n+1} - h_n \|_{\sigma_{n+1},\rho_{n+1}} \leqslant \varepsilon_{n+1}$.
- $|I_{n+1} - I_n| \leqslant \rho_{n+1}$.

Preuve :

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en suivant l'analyse menée plus haut et le choix des constantes.

c)Conclusion Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\psi_n = \Phi_0 \circ \Phi_1 \circ ... \circ \Phi_n : \mathcal{A}_{\sigma_n - 3\delta_n, \frac{\rho_n}{4}}(I_n) \to \mathcal{A}_{\sigma_0,\rho_0}(I_0)$. Les équations du mouvement régit par l'hamiltonien H_n sont

$$(E_n) \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{I} & = & -\dfrac{\partial f_n}{\partial \phi} \\ \dot{\phi} & = & \omega_n(I) + \frac{\partial f_n}{\partial I} \end{array} \right.$$

On remarque que si (I^n, ϕ^n) est une solution de l'équation (E_n) associée à l'hamiltonien $H_n = H_0 \circ \psi_{n-1}$, alors $\psi_{n-1}(I^n, \phi^n)$ est une solution de l'équation (E_0) associée à l'hamiltonien H_0.
Par la proposition précédente et la formule de Cauchy comme on en a l'habitude maintenant, il vient :

$$\| \frac{\partial f_n}{\partial I} \|_{\sigma_n, \frac{\rho_n}{2}} \leqslant \frac{4N}{\rho_n} \varepsilon_n \text{ et } \| \frac{\partial f_n}{\partial \phi} \|_{\sigma_n - \delta_n, \rho_n} \leqslant \frac{2N}{\delta_n} \varepsilon_n.$$

En intégrant (E_n) on voit que pour conditions initiales (I_n, ϕ_0) ($\phi_0 \in \mathbb{T}^N$) et pour un temps de l'ordre de 2^n, on a que la trajectoire vit dans $\mathcal{A}_{\sigma_n - 3\delta_n, \frac{\rho_n}{4}}(I_n)$.
Ainsi, notant $(I^n(t), \phi^n(t))$ la solution de (E_n) à l'instant t, il vient :

$$\max \left(\sup_{|t| \leqslant 2^n} |I^n(t) - I_n|, \sup_{|t| \leqslant 2^n} |\phi^n(t) - (\omega^* t + \phi_0)| \right) \lesssim 2^{2n+2} \frac{\Omega \varepsilon_n N}{\rho_n \delta_n}.$$

En utilisant la proposition "récurrence" précédente, on voit que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente vers un certain I_∞.
On en déduit (par choix des constantes), que pour t borné, on a :

$$(I^n(t), \phi^n(t)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (I_\infty, \omega^* t + \phi_0).$$

De plus, en considérant des différences de compositions itérées, on montre (admis) que $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une certaine condition de Cauchy et que donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \psi_n(I_\infty, \omega^* t + \phi_0) = (I^*(t), \phi^*(t))$$

et pour t borné,

$$\lim_{n \to +\infty} |\psi_n(I_\infty, \omega^* t + \phi_0) - \psi(I^n(t), \phi^n(t))| = 0.$$

D'où

$$\lim_{n \to +\infty} \psi_n(I^n(t), \phi^n(t)) = (I^*(t), \phi^*(t)).$$

En conclusion, $(I^*(t), \phi^*(t))$ est une solution quasi-périodique de $H_0 = h + f$.

1.3 Commentaires

Le théorème présenté ci-dessus est la version la plus simple des théorèmes de la théorie KAM. Des versions plus raffinées ont vu le jour. Tout d'abord, dans sa version primordiale donnée par Kolmogorov ($H = h + \varepsilon f$) on fait apparaître des ensembles de Cantor (construits en enlevant à chaque étape un bout de l'ensemble des paramètres ε) et dont la mesure tend à devenir maximale à mesure que la perturbation devient petite. De ce qui a été présenté, c'est le choix des I_n qui a permis d'éviter cette subtilité. Remarquons que pour résoudre l'équation homologique, il aurait été possible de travailler en régularité Gevrey $\left(\mathcal{G}(s) := \left\{ f / \forall k, |\hat{f}(k)| = O(e^{-C|k|^s}) \right\}\right)$, la complication étant la perte de la formule de Cauchy. Ce sont des classes de fonctions entre la régularité $\mathcal{C}^\infty$ et la régularité analytique $\mathcal{C}^\omega$.
Peu après, Moser a su étendre la théorie à la régularité $\mathcal{C}^r$ pour un r assez grand. La preuve consiste en un schéma de Nash-Moser (cf. partie suivante).

2 Théorème de Nash-Moser

2.1 Présentation générale

Le théorème de Nash-Moser est une généralisation du théorème des fonctions implicites. Rappelons pour la forme ce dernier :

Théorème 2.1 (des fonctions implicites)**.** *Soient $(E, \| \cdot \|_E)$, $(F, \| \cdot \|_F)$ et $(G, \| \cdot \|_G)$ des espaces de Banach. On munit $E \times F$ de la norme $\| (x, y) \|_{E\times F} = \max(\| x \|_E, \| y \|_F)$. Soit U un ouvert de $(E \times F, \| \cdot \|_{E\times F})$. Soit $(a, b) \in U$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{C}^k(U, G)$ telle que $f(a, b) = 0$ et la différentielle partielle de f en la seconde variable au point (a, b) est une bijection de F sur G.*
Alors il existe un voisinage ouvert V de a dans $(E, \| \cdot \|_E)$, un voisinage ouvert W de b dans $(F, \| \cdot \|_F)$ tels que $V \times W \subset U$ et $\varphi \in \mathcal{C}^k(V, W)$ tels que

$$(x \in V, y \in W \text{ et } f(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x \in V \text{ et } y = \varphi(x)) .$$

Remarques :

- Ce théorème signifie que la "courbe" définie implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$ peut, localement, être vue comme la graphe de la fonction φ.
- La condition de bijectivité sur la différentielle partielle est une **condition ponctuelle** au point (a, b). De plus, cette condition implique que F et G sont **isomorphes**.
- Fondamentalement, la preuve de ce théorème repose sur un **schéma de Newton** du type

$$x_{n+1} = x_n - dF(x_n)^{-1}(F(x_n)).$$

La nécessité d'une généralisation de ce théorème vient du fait que les opérateurs différentiels font perdre des dérivées. Typiquement $P : H^{s+r} \to H^s$ (perte de r dérivées). La condition d'isomorphisme est donc violée et le théorème précédent s'écroule. Pour remédier à ce problème, l'idée de Nash a été de ne plus considérer des espaces de Banach fixes mais, à la place, de considérer une échelle d'espaces de Banach (typiquement $\bigcap_{s\geqslant 0} H^s$). Naturellement, les hypothèses sur f et le schéma de la preuve en seront bouleversés. f et ses dérivées/différentielles partielles devront vérifier des estimations dites "douces" autorisant une perte fixe de régularité et ayant une forme quasi-linéaire, du type (pour α petit) :

$$\| \partial^\alpha f(u) \|_s \leqslant C(s)(1+ \| u \|_{s+\nu}).$$

Enfin, le schéma de la preuve sera un algorithme de Newton faisant intervenir à chaque étape un opérateur T_n de régularisation (typiquement une projection sur un sous-espace) compensant ainsi la perte occasionnée.

$$x_{n+1} = x_n - T_n dF(x_n)^{-1}(F(x_n)).$$

Le contrôle de la perte se fait, à chaque étape, par les estimations "douces" sur l'inverse du linéarisé régularisé dans la ou les normes d'intérêt.
Il existe, dans la littérature, différentes versions du théorème de Nash-Moser suivant le cadre d'application. Les deux plus connues étant celles de Hörmander [Ho85] et celle de Alinhac et Gérard [AG91].

2.2 Une version de ce théorème pour des applications en EDP

On présente ici un théorème de Nash-Moser démontré récemment par Berti, Bolle et Procesi dans [BBP09]. Ce théorème proche d'un théorème de type bifurcation (cf. sous-section suivante) se veut "prêt à l'emploi" pour d'éventuelles applications aux EDP (cf. section suivante).

2.2.1 Notations, hypothèses et conclusions

Soit $(X_s, \| \cdot \|_s)_{s\geqslant 0}$ une famille échelonnée d'espaces de Banach :

$$\forall (s, s') \in (\mathbb{R}_+)^2, s \leqslant s' \Rightarrow X_{s'} \subset X_s \text{ et } \forall u \in X_{s'}, \| u \|_s \leqslant \| u \|_{s'} .$$

On pose $X = \bigcap_{s\geqslant 0} X_s$.
On suppose qu'il existe une famille croissante $(E^{(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels fermés de X telle que pour tout $s \geqslant 0$, $E = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} E^{(N)}$ soit dense dans X_s.
On suppose qu'il existe une famille $(\Pi^{(N)})_{N\in\mathbb{N}}$ de projecteurs telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $s \geqslant 0$ et pour tout $d \geqslant 0$ on ait :

- $\Pi^{(N)} : X_0 \to E^{(N)}$ est surjectif.
- (S1) $\forall u \in X_s, \| \Pi^{(N)} u \|_{s+d} \leqslant C(s, d) N^d \| u \|_s$,

- (S2) $\forall u \in X_{s+d}, \| (Id - \Pi^{(N)})u \|_s \leqslant C(s,d) N^{-d} \| u \|_{s+d}$.

Remarques :

- Dans toute la suite la notation $C(...)$ ou $K(...)$ désigne une constante multiplicative strictement positive dépendant des paramètres donnés entre parenthèses. Ces constantes sont susceptibles de changer d'une ligne à l'autre incluant d'éventuelles nouvelles constantes multiplicatives.
- (S1) implique que en restriction à $E^{(N)}$, les normes $(\| \cdot \|_s)_{s \geqslant 0}$ sont équivalentes.
- (S2) mise avec l'hypothèse de densité de E dans chaque X_s implique que

$$\forall s \geqslant 0, \forall u \in X_s, \| u - \Pi^{(N)} u \|_s \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Il faut penser $X_s = H^s(\mathbb{T}^d)$ (et donc $X = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^d)$) avec $E^{(N)} = \mathrm{Vect}(y \mapsto e^{i\langle k,y \rangle}/k \in \mathbb{Z}^d, |k| \leqslant N)$ et $\Pi^{(N)}$ le projecteur orthogonal (au sens L^2) sur $E^{(N)}$. Les $\Pi^{(N)}$ jouent un rôle d'opérateurs régularisants.

Soit $\varepsilon_0 > 0$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Soit Λ Un ouvert borné de $\mathbb{R}^q$. Soit $s_0 \geqslant 0$. Soit $\nu > 0$. On considère une application $F \in \bigcap_{s \geqslant s_0} \mathcal{C}^2([0,\varepsilon_0[\times \Lambda \times X_{s+\nu}, X_{s_0})$ satisfaisant les propriétés suivantes :

- $(F1)$ $\forall \lambda \in \Lambda, F(0,\lambda,0) = 0$.

On suppose qu'il existe $S \in]s_0, +\infty]$ tel que pour tout $s \in [s_0, S[$, pour tout $u \in X_{s+\nu}$ vérifiant $\| u \|_{s_0} \leqslant 2$ on ait pour tout $(\varepsilon, \lambda) \in [0,\varepsilon_0[\times \Lambda$ les estimées douce suivantes :

- $(F2)$ $\| \partial_{(\varepsilon,\lambda)} F(\varepsilon,\lambda,u) \|_s \leqslant C(s)(1+ \| u \|_{s+\nu})$ et $\| D_u F(\varepsilon,\lambda,0)[h] \|_s \leqslant C(s) \| h \|_{s+\nu}$,
- $(F3)$ $\| D_u^2 F(\varepsilon,\lambda,u)[h,v] \|_s \leqslant C(s)(\| u \|_{s+\nu} \| h \|_{s_0} \| v \|_{s_0} + \| v \|_{s+\nu} \| h \|_{s_0} + \| h \|_{s+\nu} \| v \|_{s_0})$,
- $(F4)$ $\| \partial_{(\varepsilon,\lambda)} D_u F(\varepsilon,\lambda,u)[h] \|_s \leqslant C(s)(\| h \|_{s+\nu} + \| u \|_{s+\nu} \| h \|_{s_0})$.

où on a noté $\partial_{(\varepsilon,\lambda)}$ pour désigner au choix ∂_ε ou ∂_{λ_j} pour un $j \in [\![1,q]\!]$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $L^{(N)}(\varepsilon,\lambda,u) = \Pi^{(N)} D_u F(\varepsilon,\lambda,u)_{|E^{(N)}}$.

Soit $(\mu,\sigma) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tels que

$$(P): \qquad \sigma > 4(\mu+\nu) \text{ et } \overline{s} := s_0 + 4(\mu+\nu+1) + 2\sigma < S.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $\gamma > 0$, pour tout $K > 0$, on pose :

- $J_{\gamma,\mu}^{(N)} \subset \left\{ (\varepsilon,\lambda,u) \in [0,\varepsilon_0[\times \Lambda \times E^{(N)} / \begin{array}{l} L^{(N)}(\varepsilon,\lambda,u) \text{ est inversible et} \\ \forall s \in \{s_0, \overline{s}\}, \forall h \in E^{(N)}, \| L^{(N)}(\varepsilon,\lambda,u)^{-1}[h] \|_s \leqslant \frac{N^\mu}{\gamma}(\| h \|_s + \| u \|_s \| h \|_{s_0}) \end{array} \right\}$,
- $\mathcal{U}_K^{(N)} = \{ u \in \mathcal{C}^1([0,\varepsilon_0[\times \Lambda, E^{(N)}) / \| u \|_{s_0} \leqslant 1 \text{ et } \| \partial_{(\varepsilon,\lambda)} u \|_{s_0} \leqslant K \}$,
- pour tout $u \in \mathcal{U}_K^{(N)}$, $G_{\gamma,\mu}^{(N)}(u) = \left\{ (\varepsilon,\lambda) \in [0,\varepsilon_0[\times \Lambda / (\varepsilon,\lambda,u(\varepsilon,\lambda)) \in J_{\gamma,\mu}^{(N)} \right\}$.

Finalement on énonce la dernière hypothèse (la plus importante). On suppose
(L) : Il existe $(\sigma,\mu) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $M \in \mathbb{N}$ et $(C,\overline{\gamma}) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que :

- σ et μ satisfont (P),
- $\forall \gamma \in]0,\overline{\gamma}], \varepsilon \in]0,\varepsilon_0], | \left(G_{\gamma,\mu}^{(M)}(0) \right)^c \cap ([0,\varepsilon[\times \Lambda) | \leqslant C\gamma\varepsilon$,
- Pour tout $\gamma \in]0,\overline{\gamma}]$, pour tout $\forall \overline{K} > 0$, il existe $\overline{\varepsilon} = \overline{\varepsilon}(\gamma,\overline{K}) \in]0,\varepsilon_0]$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0,\overline{\varepsilon}]$, pour tout $M \leqslant N \leqslant N'$, pour tout $u_1 \in \mathcal{U}_{\overline{K}}^{(N)}, \forall u_2 \in \mathcal{U}_{\overline{K}}^{(N')}$ tels que $\| u_2 - u_1 \|_{s_0} \leqslant N^{-\sigma}$ on ait

$$| \left(G_{\gamma,\mu}^{(N')}(u_2) \right)^c \setminus \left(G_{\gamma,\mu}^{(N)}(u_1) \right)^c \cap ([0,\varepsilon[\times \Lambda) | \leqslant C \frac{\gamma\varepsilon}{N}.$$

Théorème 2.2. *On suppose les hypothèses $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, $(F4)$, (L) et (P) vérifiées. Alors il existe $C > 0$ et pour tout $\gamma \in]0,\overline{\gamma}[$, il existe $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\gamma) \in]0,\varepsilon_0]$ et une application $u : [0,\varepsilon_3[\times \Lambda \to X_{s_0+\nu}$ tels que*

$$\forall (\varepsilon,\lambda) \in [0,\varepsilon_3[\times \Lambda \backslash \mathcal{C}_\gamma, u(0,\lambda) = 0 \text{ et } F(\varepsilon,\lambda,u(\varepsilon,\lambda)) = 0$$

où $\mathcal{C}_\gamma$ est un sous-ensemble de $[0,\varepsilon_3[\times \Lambda$ de mesure de Lebesgue $|\mathcal{C}_\gamma| \leqslant C\gamma\varepsilon_3$.
De plus, on a :

$$\forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_3[, |\mathcal{C}_\gamma \cap ([0,\varepsilon[\times \Lambda)| \leqslant C\gamma\varepsilon.$$

2.2.2 Preuve

Le gros du travail est de démontrer le sous-théorème suivant. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $N_n = N_0^{2^n}$ où $N_0 = N_0(\gamma) \in \mathbb{N}$ est choisit assez grand.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n = E^{(N_n)}$; $\Pi_n = \Pi^{(N_n)}$ et $J^n_{\gamma,\mu} = J^{(N_n)}_{\gamma,\mu}$.
Enfin, pour toute partie A et pour tout $\eta > 0$, on note $\mathcal{N}(A,\eta)$ n'importe quel voisinage ouvert de A de taille η (avec la convention $A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{N}(A,\eta) = \emptyset$).

Théorème 2.3. *On suppose $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, $(F4)$ et (P).*
Alors il existe $N_0 = N_0(\gamma)$, $K_0(\gamma) > 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\gamma) \in]0,\varepsilon_0]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{C}^1([0,\varepsilon_2[\times\Lambda, X_{s_0+\nu}))^{\mathbb{N}}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

- $(P1)_n$ *$u_n(\varepsilon,\lambda) \in E_n$, $u_n(0,\lambda) = 0$, $\| u_n \|_{s_0} \leqslant 1$ et $\| \partial_{(\varepsilon,\lambda)} u_n \|_{s_0} \leqslant K_0(\gamma) N_0^{\frac{\sigma}{2}}$,*
- $(P2)_n$ *$\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\| u_k - u_{k-1} \|_{s_0} \leqslant N_k^{-\sigma-1}$ et $\| \partial_{(\varepsilon,\lambda)}(u_k - u_{k-1}) \|_{s_0} \leqslant N_k^{-\nu-1}$,*
- $(P3)_n$ *Si on pose $u_{-1} = 0$ et $A_n = \bigcap_{k=0}^{n} G^{(N_k)}_{\gamma,\mu}(u_{k-1})$, alors on a :*

$$(\varepsilon,\lambda) \in \mathcal{N}(A_n, \gamma N_n^{-\frac{\sigma}{2}}) \Rightarrow u_n(\varepsilon,\lambda) \text{ est solution de } (\mathcal{F}_n) : \Pi_n F(\varepsilon,\lambda,u) = 0,$$

- $(P4)_n$ *Si on pose $B_n = 1 + \| u_n \|_{\overline{s}}$ et $B'_n = 1 + \| \partial_{(\varepsilon,\lambda)} u_n \|_{\overline{s}}$ alors on a :*

$$B_n \leqslant 2N_{n+1}^{\mu+\nu} \text{ et } B'_n \leqslant 2N_{n+1}^{\mu+\nu+\frac{\sigma}{2}}.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{C}^1([0,\varepsilon_2[\times\Lambda, X_{s_0+\nu})$ muni de la norme $\mathcal{C}^1$ vers un certain u vérifiant :

$$u(0,\lambda) = 0 \text{ et } (\varepsilon,\lambda) \in A_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow F(\varepsilon,\lambda,u(\varepsilon,\lambda)) = 0.$$

a)Résultats préliminaires On commence par donner trois estimations qui se révèleront utiles pour la suite et qui sont une conséquence immédiate de la formule de Taylor avec reste intégral et des formules $(F1)$, $(F2)$ et $(F3)$.
Pour tout $s \in [s_0, S[$, pour tout $(u,h) \in X^2_{s+\nu}$ tels que $\| u \|_{s_0} \leqslant 2$ et $\| h \|_{s_0} \leqslant 1$, on a :

- $(F5)$ $\| F(\varepsilon,\lambda,u) \|_s \leqslant C(s)(\varepsilon + \| u \|_{s+\nu})$,
- $(F6)$ $\| D_u F(\varepsilon,\lambda,u)[h] \|_s \leqslant C(s)(\| u \|_{s+\nu} \| h \|_{s_0} + \| h \|_{s+\nu})$,
- $(F7)$ $\| F(\varepsilon,\lambda,u+h) - F(\varepsilon,\lambda,u) - D_u F(\varepsilon,\lambda,u)[h] \|_s \leqslant C(s)(\| u \|_{s+\nu} \| h \|^2_{s_0} + \| h \|_{s+\nu} \| h \|_{s_0})$.

Lemme 2.4 (inversibilité préliminaire). *Soit $N \in \mathbb{N}$. Soient A et R deux opérateurs linéaires de $E^{(N)}$ dans lui-même tels que A soit inversible. On suppose qu'il existe $(\alpha,\beta,\rho,\delta) \in (\mathbb{R}_+)^4$ et $s > s_0$ tels que :*

$$\begin{array}{l} \forall v \in E^{(N)}, \| A^{-1}v \|_{s_0} \leqslant \alpha \| v \|_{s_0} \quad \text{et} \quad \| A^{-1}v \|_s \leqslant \alpha \| v \|_s + \beta \| v \|_{s_0} \\ \forall k \in E^{(N)}, \| Rk \|_{s_0} \leqslant \delta \| k \|_{s_0} \quad \text{et} \quad \| Rk \|_s \leqslant \delta \| k \|_s + \rho \| k \|_{s_0} \end{array}$$

Alors, si $\alpha\delta \leqslant \frac{1}{2}$, alors $A+R$ est inversible et on a :

$$\forall v \in E^{(N)}, \| (A+R)^{-1}v \|_{s_0} \leqslant 2\alpha \| v \|_{s_0} \quad \text{et} \quad \| (A+R)^{-1}v \|_s \leqslant 2\alpha \| v \|_s + 4(\beta + \alpha^2\rho) \| v \|_{s_0} .$$

<u>Preuve :</u>
On suppose $\alpha\delta \leqslant \frac{1}{2}$.
• Comme $E^{(N)}$ est un sous-espace vectoriel fermé du Banach $(X_{s_0}, \| \cdot \|_{s_0})$, alors $(E^{(N)}, \| \cdot \|_{s_0})$ est lui-même un Banach. On écrit $A + R = (Id + RA^{-1})A$ et on remarque que, les opérateurs R et A^{-1} étant continus sur $(E^{(N)}, \| \cdot \|_{s_0})$, l'opérateur RA^{-1} est lui-même continu sur $(E^{(N)}, \| \cdot \|_{s_0})$ de norme

$$|||RA^{-1}|||_{\mathcal{L}_c(E^{(N)})} \leqslant |||R|||_{\mathcal{L}_c(E^{(N)})} |||A^{-1}|||_{\mathcal{L}_c(E^{(N)})} \leqslant \alpha\delta \leqslant \frac{1}{2}.$$

Or, il est de notoriété publique que, dans une algèbre de Banach, la boule unité ouverte centrée en l'élément unité (l'identité ici) est incluse dans les inversibles. D'où $Id + RA^{-1}$ est inversible, puis, comme A est aussi inversible, $A + R$ est aussi inversible.
• Soit $v \in E^{(N)}$. On pose $k = (A+R)^{-1}v$. On remarque que :

$$k = (A+R)^{-1}v \Leftrightarrow (A+R)k = v \Leftrightarrow Ak = v - Rk \Leftrightarrow k = A^{-1}(v - Rk).$$

On en déduit que pour tout $s > s_0$ on a, par hypothèses (estimations) sur les opérateurs :

$\| k \|_s = \| A^{-1}(v - Rk) \|_s \leqslant \alpha \| v - Rk \|_s + \beta \| v - Rk \|_{s_0} \leqslant \alpha \| v \|_s + \alpha\delta \| k \|_s + \alpha\rho \| k \|_{s_0} + \beta \| v \|_{s_0} + \beta\delta \| k \|_{s_0}$.

Enfin, en utilisant que $\alpha\delta \leqslant \frac{1}{2}$ et que $\| k \|_{s_0} = \| (A+R)^{-1} v \|_{s_0} \leqslant 2\alpha \| v \|_{s_0}$, on a :

$$\| k \|_s \leqslant 2(\alpha \| v \|_s + (2\alpha^2\rho + \beta + 2\beta\delta\alpha) \| v \|_{s_0}) \leqslant 2\alpha \| v \|_s + 4(\alpha^2\rho + \beta) \| v \|_{s_0} .$$

Lemme 2.5. *Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit $(\varepsilon, \lambda, u) \in J^{(N)}_{\gamma,\mu}$ tel que $\| u \|_{s_0} \leqslant 1$.*
Alors il existe $c_0 = c_0(\overline{s}) > 0$ tel que si pour un certain $h \in E^{(N)}$, $|(\varepsilon', \lambda') - (\varepsilon, \lambda)| + \| h \|_{s_0} \leqslant c_0 \gamma N^{-\mu-\nu}$, alors $L^{(N)}(\varepsilon', \lambda', u+h)$ est inversible, et on a pour tout $v \in E^{(N)}$:

$$\| L^{(N)}(\varepsilon', \lambda', u+h)^{-1}[v] \|_{s_0} \leqslant 4\frac{N^\mu}{\gamma} \| v \|_{s_0},$$

et

$$\| L^{(N)}(\varepsilon', \lambda', u+h)^{-1}[v] \|_{\overline{s}} \leqslant 4\frac{N^\mu}{\gamma} \| v \|_{\overline{s}} + K\frac{N^{2\mu+\nu}}{\gamma^2}(\| u \|_{\overline{s}} + \| h \|_{\overline{s}}) \| v \|_{s_0} .$$

Preuve :
On pose $z(\varepsilon, \lambda)$ et $z' = (\varepsilon', \lambda')$. On pose $A = L^{(N)}(z, u)$ et $R = L^{(N)}(z', u+h) - L^{(N)}(z, u)$.
• Alors comme $(\varepsilon, \lambda, u) \in J^{(N)}_{\gamma,\mu}$ et $\| u \|_{s_0} \leqslant 1$ on a :

$$\forall v \in E^{(N)}, \| A^{-1} v \|_{s_0} = \| L^{(N)}(\varepsilon, \lambda, u)^{-1}[v] \|_{s_0} \leqslant \frac{N^\mu}{\gamma}(1 + \| u \|_{s_0}) \| v \|_{s_0} \leqslant \alpha \| v \|_{s_0}$$

où on a posé $\alpha = 2\frac{N^\mu}{\gamma}$. De même

$$\forall v \in E^{(N)}, \| A^{-1} v \|_{\overline{s}} = \| L^{(N)}(\varepsilon, \lambda, u)^{-1}[v] \|_{\overline{s}} \leqslant \frac{N^\mu}{\gamma}(\| v \|_{\overline{s}} + \| u \|_{\overline{s}} \| v \|_{s_0}) \leqslant \alpha \| v \|_{\overline{s}} + \beta \| v \|_{s_0}$$

où on a posé $\beta = \frac{N^\mu}{\gamma} \| u \|_{\overline{s}}$.
• En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 0, en identifiant les applications bilinéaires avec les applications linéaires définies sur un espace d'applications linéaires, en utilisant $(F3)$ et $(F4)$ puis $(S1)$ (car u, h et k sont dans $E^{(N)}$) on a, pour $s \in \{s_0, \overline{s}\}$:

$$\begin{array}{rcl} \| Rk \|_s & = & \| L^{(N)}(z', u+h)[k] - L^{(N)}(z, u)[k] \|_s \\ & \leqslant & \| L^{(N)}(z', u+h)[k] - L^{(N)}(z, u+h)[k] \|_s + \| L^{(N)}(z, u+h)[k] - L^{(N)}(z, u)[k] \|_s \\ & \leqslant & |z' - z| C(s) \left(\| k \|_{s+\nu} + (\| u \|_{s+\nu} + \| h \|_{s+\nu})\right) \| k \|_{s_0} \\ & & + C(s) \left((\| u \|_{s+\nu} + \| h \|_{s+\nu}) \| h \|_{s_0} \| k \|_{s_0} + \| h \|_{s+\nu} \| k \|_{s_0} + \| h \|_{s_0} \| k \|_{s+\nu}\right) \\ & \leqslant & \delta \| k \|_{s_0} + \rho \| k \|_s \end{array}$$

où on a posé $\delta = C(\overline{s}, s_0) N^\nu \left(|z' - z| + \| h \|_{s_0}\right)$ et $\rho = C(\overline{s})(\| u \|_{\overline{s}} + 2 \| h \|_{\overline{s}}) N^\nu$.
• Ainsi, on a :

$$\alpha\delta \leqslant 2\gamma^{-1} N^\mu C(\overline{s}, s_0) N^\nu \frac{1}{4C(\overline{s}, s_0)} N^{-\mu-\nu} = \frac{1}{2}.$$

Donc, d'après le lemme précédent, on en déduit les estimées annoncées.

b)Initialisation On part de ce que l'on sait, i.e. $\forall \lambda \in \Lambda, F(0, \lambda, 0) = 0$.
On pose donc $u_{-1} = 0$ et $A_0 = G^{(N_0)}_{\gamma,\mu}(0)$. Puis on écrit la formule de Taylor :

$$\forall u \in E_0, \Pi_0 F(\varepsilon, \lambda, u) = r_{-1} + L_0[u] + R_{-1}(u)$$

où on a posé $r_{-1} = \Pi_0(\varepsilon, \lambda, 0)$, $L_0 = L^{(N_0)}(\varepsilon, \lambda, 0)$ et $R_{-1}(u) = \Pi_0(F(\varepsilon, \lambda, u) - F(\varepsilon, \lambda, 0) - D_u F(\varepsilon, \lambda, 0)[u])$.
On remarque que :

$$u \text{ est solution de } (\mathcal{F}_0) \Leftrightarrow \mathcal{G}_0(u) = u \text{ où } \mathcal{G}_0(u) = -L_0^{-1}(r_{-1} + R_{-1}(u)).$$

On est donc amené à résoudre un problème de point fixe. Pour ce faire, on doit garantir l'inversibilité de L_0 et le caractère contractant de $\mathcal{G}_0$. Ensuite, on doit vérifier que l'objet solution construit vérifie les conditions demandées.

Les preuves étant quasiment des copier-coller des celles de l'hérédité, on ne donne que les étapes.
Étape 1 : Inversibilité de L_0

Lemme 2.6 (inversibilité 0)**.** *Soit* $(\varepsilon,\lambda)\in\mathcal{N}(A_0,2\gamma N_0^{-\frac{\sigma}{2}})$*. Alors* $L_0=L^{(N_0)}(\varepsilon,\lambda,0)$ *est inversible, et on a :*

$$\| L^{(N_0)}(\varepsilon,\lambda,0)^{-1} \|_{s_0}\leqslant 4\gamma^{-1}N_0^{\mu} \text{ et } \| L^{(N_0)}(\varepsilon,\lambda,0)^{-1} \|_{\overline{s}}\leqslant 4\gamma^{-1}N_0^{\mu}.$$

Étape 2 Argument de point fixe

Lemme 2.7 (contraction 0)**.** *Il existe* $C_0=C_0(s_0)>0$ *et* $\varepsilon_2=\varepsilon_2(N_0,s_0,\gamma)>0$ *tels que pour tout* $(\varepsilon,\lambda)\in\mathcal{N}(A_0,2\gamma N_0^{-\frac{\sigma}{2}})$ *avec* $\varepsilon\leqslant\varepsilon_2$*, on ait en posant* $\rho_0=C_0\varepsilon\gamma^{-1}N_0^{\mu}$ *et* $\mathcal{B}_0=\{u\in E_0.\ \| u \|_{s_0}\leqslant\rho_0\}$ *que :*
$\mathcal{G}_0$ *est une contraction sur* $\mathcal{B}_0$*.*

On note $\widetilde{u}_0\in\mathcal{B}_0\subset E_0$ l'unique point fixe de $\mathcal{G}_0$ sur $\mathcal{B}_0$ donné par le théorème de pont fixe de Banach-Picard. On remarque que $\widetilde{u}_0$ dépend des paramètres $(\varepsilon,\lambda)\in\mathcal{N}(A_0,2\gamma N_0^{-\frac{\sigma}{2}})$ et est construit pour être solution de $(\mathcal{F}_0)$. Par $(F1)$ est unicité du point fixe que si $(0,\lambda)\in\mathcal{N}(A_0,2\gamma N_0^{-\frac{\sigma}{2}})$, alors $\widetilde{u}_0(0,\lambda)=0$.

Étape 3 : Propriétés de $\widetilde{u}_0$

Lemme 2.8 (estimée sous les normes 0)**.** $\widetilde{u}_0\in\mathcal{C}^1(\mathcal{N}(A_0,2\gamma N_0^{-\frac{\sigma}{2}}),\mathcal{B}_0)$ *et on a :*

$$\| \partial_{(\varepsilon,\lambda)}\widetilde{u}_0 \|_{s_0}\leqslant KN_0^{\mu}\gamma^{-1},\quad \| \widetilde{u}_0 \|_{\overline{s}}\leqslant 2N_1^{\mu+\nu} \text{ et } \| \partial_{(\varepsilon,\lambda)}\widetilde{u}_0 \|_{\overline{s}}\leqslant 2N_1^{\mu+\nu+\frac{\sigma}{2}}.$$

Étape 4 : Construction d'une extension u_0 de $\widetilde{u}_0$

Lemme 2.9 (extension 0)**.** *Il existe* $u_0\in\mathcal{C}^1([0,\varepsilon_2[\times\Lambda,\mathcal{B}_0)$ *telle que :*

- $u_0=\widetilde{u}_0$ *sur* $\mathcal{N}(A_0,\gamma N_0^{-\frac{\sigma}{2}})$*,*
- u_0 *satisfait aux propriétés* $(P1)_0$*,* $(P2)_0$*,* $(P3)_0$ *et* $(P4)_0$*.*
- $\| u_0 \|_{s_0}\leqslant\frac{1}{2}$ *et* $\| \partial_{(\varepsilon,\lambda)}u_0 \|_{s_0}\leqslant\frac{K_0(\gamma)}{2}N_0^{\frac{\sigma}{2}}$*.*

c)Hérédité Le schéma est identique à celui de l'initialisation, mais avec un peu plus de technique.
On suppose que l'on a construit $u_n\in\mathcal{C}^1([0,\varepsilon_2[\times\Lambda,E_n)$ vérifiant $(P1)_n$, $(P2)_n$, $(P3)_n$ et $(P4)_n$.
On cherche u_{n+1} solution de $(\mathcal{F}_{n+1}):\Pi_{n+1}F(\varepsilon,\lambda,u(\varepsilon,\lambda))=0$ sachant u_n solution de $(\mathcal{F}_n):\Pi_nF(\varepsilon,\lambda,u(\varepsilon,\lambda))=0$.
On écrit à nouveau la formule de Taylor :

$$\forall h\in E_{n+1},\Pi_{n+1}F(\varepsilon,\lambda,u_n(\varepsilon,\lambda)+h)=r_n+L_{n+1}[h]+R_n(h)$$

où on a posé $r_n=\Pi_{n+1}F(\varepsilon,\lambda,u_n(\varepsilon,\lambda))$, $L_{n+1}=L^{(N_{n+1})}(\varepsilon,\lambda,u_n(\varepsilon,\lambda))$ et
$R_n(h)=\Pi_{n+1}(F(\varepsilon,\lambda,u_n(\varepsilon,\lambda)+h)-F(\varepsilon,\lambda,u_n(\varepsilon,\lambda))-D_uF(\varepsilon,\lambda,u_n(\varepsilon,\lambda))[h])$.
On s'attend donc à trouver u_{n+1} sous la forme $u_{n+1}=u_n+h_{n+1}$ avec h_{n+1} solution de l'équation précédente avec premier membre nul. On remarque que :

$$0=r_n+L_{n+1}[h]+R_n(h)\Leftrightarrow\mathcal{G}_{n+1}(h)=h \text{ avec } \mathcal{G}_{n+1}(h)=-L_{n+1}^{-1}(r_n+R_n(h)).$$

A chaque étape, on sera donc amené à résoudre un problème de point fixe. Pour ce faire, on doit garantir l'inversibilité de L_{n+1} et le caractère contractant de $\mathcal{G}_{n+1}$. Ensuite il faudra vérifier que l'objet solution construit vérifie les conditions demandées.

Étape 1 : Inversibilité de L_{n+1}
Il faut bien se rappeler que, malgré la notation, L_{n+1} dépend des paramètres ε et λ. Il convient donc de choisir ces paramètres pour d'une part garantir l'inversibilité et d'autre part se souvenir du choix des paramètres aux étapes précédentes pour garantir l'inversibilité des L_k pour tout $k\in[\![0,n]\!]$. On pose donc naturellement

$$A_{n+1}=A_n\cap\mathcal{G}_{\gamma,\mu}^{(N_{n+1})}(u_n).$$

Il se peut que cet ensemble soit vide, auquel cas on prend la suite u stationnaire à partir de cette étape. Cependant, l'hypothèse (L) permettra d'éviter ce phénomène.
On remarque que pour $N_0\geqslant 2^{-\frac{\sigma}{2}}$ on aura $2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}}\leqslant\gamma N_n^{-\frac{\sigma}{2}}$ et donc

$$\mathcal{N}(A_{n+1},2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})\subset\mathcal{N}(A_n,\gamma N_n^{-\frac{\sigma}{2}}).$$

Lemme 2.10 (inversibilité)**.** *Soit* $(\varepsilon,\lambda)\in\mathcal{N}(A_{n+1},2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$*. Alors* L_{n+1} *est inversible et on a pour tout* $v\in E_{n+1}$ *:*

$$\| L_{n+1}^{-1}[v]\|_{s_0}\leqslant 4\frac{N_{n+1}^{\mu}}{\gamma}\| v\|_{s_0}$$

et

$$\| L_{n+1}^{-1}[v]\|_{\overline{s}}\leqslant K(\gamma)N_{n+1}^{\mu}(\| v\|_{\overline{s}}+N_{n+1}^{2(\mu+\nu)}\| v\|_{s_0}).$$

Preuve :

On pose $z=(\varepsilon,\lambda)\in\mathcal{N}(A_{n+1},2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$. Par construction, il existe $z'=(\varepsilon',\lambda')\in A_{n+1}$ tel que $|z-z'|\leqslant 2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}}$. Alors, via Taylor reste intégral et $(P1)_n$ on a :

$$|z-z'|+\| u_n(z)-u_n(z')\|_{s_0}\leqslant 2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}}(1+K_0(\gamma)N_0^{\frac{\sigma}{2}}).$$

Il reste juste à choisir N_0 assez grand pour garantir $2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}}(1+K_0(\gamma)N_0^{\frac{\sigma}{2}})\leqslant c_0\gamma N_{n+1}^{-(\mu+\nu)}$ pour pouvoir appliquer le lemme d'inversibilité préliminaire. Ceci est possible par choix des N_n et par (P). On a donc, pour tout $v\in E_{n+1}$, d'une part

$$\| L_{n+1}^{-1}[v]\|_{s_0}\leqslant 4\frac{N_{n+1}^{\mu}}{\gamma}\| v\|_{s_0}.$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\| L_{n+1}^{-1}[v]\|_{\overline{s}} &\leqslant 4\frac{N_{n+1}^{\mu}}{\gamma}\| v\|_{\overline{s}}+K\frac{N_{n+1}^{2\mu+\nu}}{\gamma^2}(\| u_n(z')\|_{\overline{s}}+\| u_n(z)-u_n(z')\|_{\overline{s}})\| v\|_{s_0}\\
&\leqslant 4\frac{N_{n+1}^{\mu}}{\gamma}\| v\|_{\overline{s}}+K\frac{N_{n+1}^{2\mu+\nu}}{\gamma^2}(\| u_n(z')\|_{\overline{s}}+\| u_n(z)\|_{\overline{s}}+\| u_n(z')\|_{\overline{s}})\| v\|_{s_0}\\
&\leqslant 4\frac{N_{n+1}^{\mu}}{\gamma}\| v\|_{\overline{s}}+3KB_n\frac{N_{n+1}^{2\mu+\nu}}{\gamma^2}\| v\|_{s_0}\\
&\underset{(P4)_n}{\leqslant} 4\frac{N_{n+1}^{\mu}}{\gamma}\| v\|_{\overline{s}}+6K\frac{N_{n+1}^{3\mu+2\nu}}{\gamma^2}\| v\|_{s_0}\\
&\leqslant K(\gamma)N_{n+1}^{\mu}(\| v\|_{\overline{s}}+N_{n+1}^{2(\mu+\nu)}\| v\|_{s_0})
\end{aligned}$$

où on a posé $K(\gamma)=\frac{1}{\gamma}\max(4,6K)$.

Étape 2 : Argument de point fixe

Lemme 2.11 (contraction)**.** *Soit* $(\varepsilon,\lambda)\in\mathcal{N}(A_{n+1},2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$.
On pose $\rho_{n+1}=N_{n+1}^{-\sigma-1}$ *et* $\mathcal{B}_{n+1}=\{h\in E_{n+1}/\ \| h\|_{s_0}\leqslant\rho_{n+1}\}$.
Alors pour N_0 *assez grand,* $\mathcal{G}_{n+1}$ *est une contraction sur* $(\mathcal{B}_{n+1},\|\cdot\|_{s_0})$.

Preuve :

• Soit $h\in E_{n+1}$. Comme $(\varepsilon,\lambda)\in\mathcal{N}(A_{n+1},2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$, d'après le lemme d'inversibilité précédent, L_{n+1}^{-1} existe et on a :

$$\|\mathcal{G}_{n+1}(h)\|_{s_0}\leqslant 4N_{n+1}^{\mu}\gamma^{-1}(\| r_n\|_{s_0}+\| R_n(h)\|_{s_0}).$$

Comme $(\varepsilon,\lambda)\in\mathcal{N}(A_{n+1},2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})\subset\mathcal{N}(A_n,\gamma N_n^{-\frac{\sigma}{2}})$, on a d'après $(P3)_n$ et le fait que $E_n\subset E_{n+1}$:

$$r_n=\Pi_{n+1}F(\varepsilon,\lambda,u_n)-\Pi_nF(\varepsilon,\lambda,u_n)=\Pi_{n+1}(Id-\Pi_n)F(\varepsilon,\lambda,u_n).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\| r_n\|_{s_0} &= \|\Pi_{n+1}(Id-\Pi_n)F(\varepsilon,\lambda,u_n)\|_{s_0} &&\\
&\leqslant C(s_0)\|(Id-\Pi_n)F(\varepsilon,\lambda,u_n)\|_{s_0} && \text{par } (S1)\\
&\leqslant C(s_0,\overline{s})N_n^{-(\overline{s}-s_0)}\| F(\varepsilon,\lambda,u_n)\|_{\overline{s}} && \text{par } (S2)\\
&\leqslant C(s_0,\overline{s})N_{n+1}^{-\frac{(\overline{s}-s_0)}{2}}(\varepsilon+\| u_n\|_{\overline{s}+\nu}) && \text{par } (F5) \text{ et définition des } N_n\\
&\leqslant C(s_0,\overline{s})N_{n+1}^{-\frac{(\overline{s}-s_0)}{2}}(\varepsilon+N_n^{\nu}\| u_n\|_{\overline{s}}) && \text{par } (S1)\\
&\leqslant C(s_0,\overline{s})N_{n+1}^{-\frac{(\overline{s}-s_0)}{2}}(\varepsilon+\| u_n\|_{\overline{s}})N_n^{\nu} && \text{pour } N_0 \text{ assez grand}\\
&\leqslant C(s_0,\overline{s})N_{n+1}^{-\frac{(\overline{s}-s_0)}{2}}B_nN_n^{\nu} && \text{par } (P4)_n \text{ et pour } \varepsilon\leqslant 1\\
&\leqslant C(s_0,\overline{s})N_{n+1}^{-2(\mu+\nu+1)-\sigma}N_{n+1}^{\mu+\nu}N_{n+1}^{\nu} && \text{par } (P4)_n \text{ et par définition de } \overline{s} \text{ et } N_n\\
&= C(s_0,\overline{s})N_{n+1}^{-\mu-\sigma-2} &&\\
&= C(s_0,\overline{s})\rho_{n+1}N_{n+1}^{-\mu-1} && \text{par définition de } \rho_{n+1}
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après $(F7)$ et la définition (Taylor) de $R_n(h)$, on a l'estimée quadratique suivante :

$$\forall s \in [s_0, S[, \| R_n(h) \|_s \leqslant C(s)(\| u_n \|_{s+\nu} \| h \|_{s_0}^2 + \| h \|_{s+\nu} \| h \|_{s_0}) \ (\star).$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcll} \| R_n(h) \|_{s_0} & \leqslant & C(s_0)(\| u_n \|_{s_0+\nu} \| h \|_{s_0}^2 + \| h \|_{s_0+\nu} \| h \|_{s_0}) & \\ & \leqslant & C(s_0)(N_{n+1}^{\nu} \| u_n \|_{s_0} \| h \|_{s_0}^2 + N_{n+1}^{\nu} \| h \|_{s_0}^2) & \text{par } (S1) \text{ car } h \in E_{n+1} \text{ et } u_n \in E_n \subset E_{n+1} \\ & \leqslant & C(s_0) N_{n+1}^{\nu} \| h \|_{s_0}^2 & \text{par } (P1)_n \\ & \leqslant & C(s_0) N_{n+1}^{\nu} \rho_{n+1}^2 & \\ & = & C(s_0) \rho_{n+1} N_{n+1}^{\nu-\sigma-1} & \end{array}$$

En combinant les estimations précédentes, il vient :

$$\begin{array}{rcll} \| r_n \|_{s_0} + \| R_n(h) \|_{s_0} & \leqslant & C(s_0, \overline{s}) \rho_{n+1} (N_{n+1}^{-\mu-1} + N_{n+1}^{\nu-\sigma-1}) & \\ & \leqslant & C(s_0, \overline{s}) \rho_{n+1} N_{n+1}^{-\mu-1} & \text{par } (P) \\ & \leqslant & \rho_{n+1} \frac{N_{n+1}^{-\mu} \gamma}{4} & \text{pour } N_0 \text{ assez grand.} \end{array}$$

D'où $\| \mathcal{G}_{n+1}(h) \|_{s_0} \leqslant \rho_{n+1}$, i.e. $\mathcal{G}_{n+1}(\mathcal{B}_{n+1}) \subset \mathcal{B}_{n+1}$.

• Pour montrer le caractère contractant de $\mathcal{G}_{n+1}$, il suffit, par l'inégalité des accroissements finis, de montrer que sa différentielle est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne. En différenciant la définition de $\mathcal{G}_{n+1}$ on trouve que pour tout $(h, v) \in \mathcal{B}_{n+1} \times E_{n+1}$, on a :

$$D_h \mathcal{G}_{n+1}(h)[v] = -L_{n+1}^{-1} \Pi_{n+1} (D_u F(\varepsilon, \lambda, u_n + h)[v] - D_u F(\varepsilon, \lambda, u_n)[v]).$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \| D_h \mathcal{G}_{n+1}(h)[v] \|_{s_0} & = & \| -L_{n+1}^{-1} \Pi_{n+1} (D_u F(\varepsilon, \lambda, u_n + h)[v] - D_u F(\varepsilon, \lambda, u_n)[v]) \|_{s_0} \\ & \leqslant & 4 N_{n+1}^{\mu} \gamma^{-1} \| \Pi_{n+1} (D_u F(\varepsilon, \lambda, u_n + h)[v] - D_u F(\varepsilon, \lambda, u_n)[v]) \|_{s_0} \\ & \leqslant & 4 C(s_0) N_{n+1}^{\mu} \gamma^{-1} \| D_u F(\varepsilon, \lambda, u_n + h)[v] - D_u F(\varepsilon, \lambda, u_n)[v] \|_{s_0} \\ & \leqslant & 4 C(s_0) N_{n+1}^{\mu} \gamma^{-1} (\| u_n \|_{s_0+\nu} \| h \|_{s_0} \| v \|_{s_0} + \| v \|_{s_0+\nu} \| h \|_{s_0} + \| v \|_{s_0} \| h \|_{s_0+\nu}) \\ & \leqslant & 7 N_{n+1}^{\mu} \gamma^{-1} \rho_{n+1} N_{n+1}^{\nu} \| v \|_{s_0} \\ & \leqslant & 7 N_{n+1}^{-1} \gamma^{-1} \rho_{n+1} \| v \|_{s_0} \\ & \leqslant & \frac{\| v \|_{s_0}}{2} \end{array}$$

où on a utilisé le lemme d'inversibilité pour la première inégalité, $(S1)$ pour la seconde, la formule de Taylor avec reste intégral couplée avec $(F3)$ pour la troisième, $(S1)$ combinée avec $\| u_n \|_{s_0} \leqslant 1$ et $\| h \|_{s_0} \leqslant \rho_{n+1}$ pour la quatrième, (P) pour la cinquième et le choix de N_0 suffisamment grand pour la dernière.

On note $\widetilde{h}_{n+1} \in \mathcal{B}_{n+1} \subset E_{n+1}$ l'unique point fixe de $\mathcal{G}_{n+1}$ sur $\mathcal{B}_{n+1}$ donné par le théorème de pont fixe de Banach-Picard. On remarque que $\widetilde{h}_{n+1}$ dépend des paramètres $(\varepsilon, \lambda) \in \mathcal{N}(A_{n+1}, 2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$ et est construit pour être solution de

$$U_{n+1}(\varepsilon, \lambda, h) := \Pi_{n+1} F(\varepsilon, \lambda, u_n(\varepsilon, \lambda) + h) = 0.$$

Par $(F1)$ est unicité du point fixe que si $(0, \lambda) \in \mathcal{N}(A_{n+1}, 2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$, alors $\widetilde{h}_{n+1}(0, \lambda) = 0$.

Étape 3 : Propriétés de $\widetilde{h}_{n+1}$

Lemme 2.12 (estimée en grande norme)**.** *Soit $(\varepsilon, \lambda) \in \mathcal{N}(A_{n+1}, 2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$. Alors $\| \widetilde{h}_{n+1} \|_{\overline{s}} \leqslant N_{n+1}^{2(\mu+\nu)}$.*

Preuve :

Par construction, $\widetilde{h}_{n+1} = \mathcal{G}_{n+1}(\widetilde{h}_{n+1})$, donc grâce au lemme d'inversibilité, il vient :

$$\| \widetilde{h}_{n+1} \|_{\overline{s}} \leqslant K(\gamma) N_{n+1}^{\mu} (\| r_n \|_{\overline{s}} + \| R_n(\widetilde{h}_{n+1}) \|_{\overline{s}} + N_{n+1}^{2(\mu+\nu)} (\| r_n \|_{s_0} + \| R_n(\widetilde{h}_{n+1}) \|_{s_0})).$$

Or d'une part :

$$\begin{array}{rcll} \| r_n \|_{\overline{s}} & = & \| \Pi_{n+1} F(\varepsilon, \lambda, u_n) \|_{\overline{s}} & \\ & \leqslant & C(s_0) \| F(\varepsilon, \lambda, u_n) \|_{\overline{s}} & \text{par } (S1) \\ & \leqslant & C(s_0)(\varepsilon + \| u_n \|_{\overline{s}+\nu}) & \text{par } (F5) \\ & \leqslant & C(s_0) N_n^{\nu} B_n & \text{par } (S1) \text{ et } (P4)_n \\ & \leqslant & C(s_0) N_{n+1}^{\mu + \frac{3}{2}\nu} & \text{par } (P4)_n \text{ et définition des } N_n \end{array}$$

et d'autre part :

$$\begin{array}{rcll}
\| R_n(\widetilde{h}_{n+1}) \|_{\overline{s}} & \leqslant & C(\overline{s})(\| u_n \|_{\overline{s}+\nu} \| \widetilde{h}_{n+1} \|_{s_0}^2 + \| \widetilde{h}_{n+1} \|_{\overline{s}+\nu} \| \widetilde{h}_{n+1} \|_{s_0}) & \text{par } (\star) \\
& \leqslant & C(\overline{s})(N_n^\nu B_n \| \widetilde{h}_{n+1} \|_{s_0}^2 + N_{n+1}^\nu \| \widetilde{h}_{n+1} \|_{\overline{s}} \| \widetilde{h}_{n+1} \|_{s_0}) & \text{par } (S1) \text{ et } (P4)_n \\
& \leqslant & C(\overline{s})(N_n^\nu N_{n+1}^{\mu+\nu} N^{-2\sigma-2} + N_{n+1}^\nu \| \widetilde{h}_{n+1} \|_{\overline{s}} N_{n+1}^{-\sigma-1} & \text{car } \| \widetilde{h}_{n+1} \|_{s_0} \leqslant \rho_{n+1} = N_{n+1}^{-\sigma-1} \text{ et par } (P4)_n \\
& \leqslant & C(\overline{s})(N_{n+1}^{-\sigma-1} + N_{n+1}^{\nu-\sigma-1} \| \widetilde{h}_{n+1} \|_{\overline{s}}). &
\end{array}$$

En combinant les estimations précédentes on trouve, pour N_0 choisi suffisamment grand pour faire disparaitre les constantes :

$$\| \widetilde{h}_{n+1} \|_{\overline{s}} \leqslant \frac{1}{2} N_{n+1}^{2(\mu+\nu)} + \frac{1}{2} \| \widetilde{h}_{n+1} \|_{\overline{s}} .$$

D'où l'on tire :

$$\| \widetilde{h}_{n+1} \|_{\overline{s}} \leqslant N_{n+1}^{2(\mu+\nu)}.$$

Lemme 2.13 (estimées des dérivées)**.** *On a $\widetilde{h}_{n+1} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{N}(A_{n+1}, 2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}}), \mathcal{B}_{n+1})$ et on a :*

$$\| \partial_{(\varepsilon,\lambda)} \widetilde{h}_{n+1} \|_{s_0} \leqslant \frac{1}{2} N_{n+1}^{-\nu-1} \quad et \quad \| \partial_{(\varepsilon,\lambda)} \widetilde{h}_{n+1} \|_{\overline{s}} \leqslant N_{n+1}^{2(\mu+\nu)+\sigma}.$$

Preuve :

Soit $z = (\varepsilon, \lambda) \in \mathcal{N}(A_{n+1}, 2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$. Par construction, on a : $0 = U_{n+1}(z, \widetilde{h}_{n+1}(z)) = \Pi_{n+1} F(z, u_n(z) + \widetilde{h}_{n+1})$. En différenciant la définition de U_{n+1} on trouve :

$$D_h U_{n+1}(z, \widetilde{h}_{n+1}) = L^{(N_{n+1})}(z, u_n(z) + \widetilde{h}_{n+1}).$$

On en déduit, par le lemme d'inversibilité la quantité précédente est inversible et que pour tout $v \in E_{n+1}$, on a :

$$\| D_h U_{n+1}(z, \widetilde{h}_{n+1})^{-1}[v] \|_{s_0} \leqslant 4 \frac{N_{n+1}^\mu}{\gamma} \| v \|_{s_0}$$

et

$$\| D_h U_{n+1}(z, \widetilde{h}_{n+1})^{-1}[v] \|_{\overline{s}} \leqslant K(\gamma) N_{n+1}^\mu (\| v \|_{\overline{s}} + N_{n+1}^{3(\mu+\nu)} \| v \|_{s_0}).$$

Comme U_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^1$ (car F l'est) et que $\widetilde{h}_{n+1}$ est à valeurs dans $\mathcal{B}_{n+1}$, en appliquant le théorème des fonctions implicites en chaque point $(z, \widetilde{h}_{n+1}(z))$ pour $z \in \mathcal{N}(A_{n+1}, 2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$, on en déduit que

$$\widetilde{h}_{n+1} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{N}(A_{n+1}, 2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}}), \mathcal{B}_{n+1})$$

et que

$$\partial_z \widetilde{h}_{n+1} = -\left(D_h U_{n+1}(z, \widetilde{h}_{n+1})\right)^{-1} (\partial_z U_{n+1})(z, \widetilde{h}_{n+1}).$$

Or, par dérivation composée et en dérivant $(\mathcal{F}_n)$ par rapport à z, on a pour tout $(z, h) \in \mathcal{N}(A_{n+1}, 2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}}) \times E_{n+1}$:

$$\begin{array}{l}
\partial_z U_{n+1}(z, h) \\
= \Pi_{n+1} \partial_z F(z, u_n + h) + \Pi_{n+1} D_u F(z, u_n + h)[\partial_z u_n] \\
= \Pi_{n+1} \partial_z F(z, u_n + h) - \Pi_n \partial_z F(z, u_n) + \Pi_{n+1} D_u F(z, u_n + h)[\partial_z u_n] - \Pi_n D_u F(z, u_n)[\partial_z u_n] \\
= \Pi_{n+1}(\partial_z F(z, u_n + h) - \partial_z F(z, u_n)) + \Pi_{n+1}(D_u F(z, u_n + h) - D_u F(z, u_n))[\partial_z u_n] \\
+ \Pi_{n+1}(Id - \Pi_n)(\partial_z F(z, u_n) + D_u F(z, u_n)[\partial_z u_n]).
\end{array}$$

On étudie les différents morceaux :

•

$$\begin{array}{l}
\| \Pi_{n+1}(\partial_z F(z, u_n + h) - \partial_z F(z, u_n)) \|_{s_0} + \| \Pi_{n+1}(D_u F(z, u_n + h) - D_u F(z, u_n))[\partial_z u_n] \|_{s_0} \\
\leqslant C(s_0) (\| \partial_z F(z, u_n + h) \|_{s_0} + \| (D_u F(z, u_n + h) - D_u F(z, u_n))[\partial_z u_n] \|_{s_0}) \\
\leqslant C(s_0) (\| h \|_{s_0+\nu} + \| u_n \|_{s_0+\nu} \| h \|_{s_0} + \| u_n \|_{s_0+\nu} \| h \|_{s_0} \| \partial_z u_n \|_{s_0} + \| \partial_z u_n \|_{s_0+\nu} \| h \|_{s_0} + \| h \|_{s_0+\nu} \| \partial_z u_n \|_{s_0}) \\
\leqslant C(s_0) \left(N_{n+1}^\nu \| h \|_{s_0} + N_n^\nu \| h \|_{s_0} + 2 N_n^\nu \| h \|_{s_0} K_0(\gamma) N_0^{\frac{\sigma}{2}} + N_{n+1}^\nu K_0(\gamma) N_0^{\frac{\sigma}{2}} \| h \|_{s_0} \right) \\
\leqslant C(s_0, \gamma) N_{n+1}^\nu \| h \|_{s_0}
\end{array}$$

où on a utilisé $(S1)$ pour la première inégalité, Taylor, $(F3)$ et $(F4)$ pour la seconde et $(S1)$ et $(P1)_n$ pour la troisième.

$$\begin{array}{ll}
\| \Pi_{n+1}(Id-\Pi_n)(\partial_z F(z,u_n)+D_uF(z,u_n)[\partial_z u_n]) \|_{s_0} & \\
\leqslant C(s_0)N_n^{-(\overline{s}-s_0)}\left(\| \partial_z F(z,u_n) \|_{\overline{s}}+\| D_uF(z,u_n)[\partial_z u_n] \|_{\overline{s}}\right) & \text{par } (S2) \\
\leqslant C(s_0)N_n^{-(\overline{s}-s_0)}\left(1+\| u_n \|_{\overline{s}+\nu}+\| u_n \|_{\overline{s}+\nu}\| \partial_z u_n \|_{s_0}^2+\| \partial_z u_n \|_{\overline{s}+\nu}\| \partial_z u_n \|_{s_0}\right) & \text{par } (F2) \text{ et } (F6) \\
\leqslant C(s_0,\gamma)N_n^{-(\overline{s}-s_0)}(1+\| u_n \|_{\overline{s}+\nu}+\| \partial_z u_n \|_{\overline{s}+\nu}) & \text{par } (P1)_n \\
\leqslant C(s_0,\gamma)N_n^{-(\overline{s}-s_0)}N_n^{\nu}N_{n+1}^{\nu+\mu+\frac{\sigma}{2}} & \text{par } (S1) \text{ et } (P4)_n \\
\leqslant C(s_0,\gamma)N_{n+1}^{-\frac{1}{2}(\mu+\nu+\sigma+4)} & \text{par } (P)
\end{array}$$

D'où l'on déduit pour N_0 suffisamment grand :

$$\| \partial_z\widetilde{h}_{n+1} \|_{s_0}\leqslant K(\gamma)N_{n+1}^{\mu}\left(N_{n+1}^{\nu-\sigma-1}+N_{n+1}^{-\frac{1}{2}(\mu+\nu+\sigma+4)}\right)\leqslant \frac{1}{2}N_{n+1}^{-\nu-1}.$$

•

$$\begin{aligned}
\| \partial_z\widetilde{h}_{n+1} \|_{\overline{s}} &\leqslant K(\gamma)N_{n+1}^{\mu}\left(\| \partial_z U_{n+1}(z,\widetilde{h}_{n+1}) \|_{\overline{s}}+N_{n+1}^{3(\mu+\nu)}\| \partial_z U_{n+1}(z,\widetilde{h}_{n+1}) \|_{s_0}\right)\\
&\leqslant K(\gamma)N_{n+1}^{\mu}\left(\| u_n \|_{\overline{s}+\nu}+\| h \|_{\overline{s}+\nu}+\| \partial_z u_n \|_{\overline{s}+\nu}+N_{n+1}^{2(\mu+\nu)}\right)\\
&\leqslant K(\gamma)N_{n+1}^{\mu+\nu}\left(N_{n+1}^{\mu+\nu+\frac{\sigma}{2}}+N_{n+1}^{2(\mu+\nu)}\right)\\
&\leqslant N_{n+1}^{2(\mu+\nu)+\sigma}
\end{aligned}$$

où on a utilisé la formule de dérivation composée donnée plus haut, $(S1)$, $(F2)$, $(F6)$, $(P1)_n$ et les estimées précédentes pour la seconde inégalité, le lemme précédent et $(P4)_n$ pour la troisième et le choix de N_0 suffisamment grand pour la dernière.

Étape 4 : Construction d'une extension de $\widetilde{h}_{n+1}$ et de u_{n+1} vérifiant les propriétés souhaitées

Lemme 2.14 (extension). *Il existe $h_{n+1}\in\mathcal{C}^1([0,\varepsilon_2[\times\Lambda,\mathcal{B}_{n+1})$ vérifiant :*

- $h_{n+1}=\widetilde{h}_{n+1}$ *sur* $\mathcal{N}(A_{n+1},\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$,
- $\forall\lambda\in\Lambda,\ h_{n+1}(0,\lambda)=0$,
- $\| h_{n+1} \|_{s_0}\leqslant N_{n+1}^{-\sigma-1}$,
- $\| \partial_{(\varepsilon,\lambda)}h_{n+1} \|_{s_0}\leqslant N_{n+1}^{-\nu-1}$.

Preuve :

On considère une fonction cut-off $\psi_{n+1}\in\mathcal{C}^1([0,\varepsilon_2[\times\Lambda,[0,1])$ valant 1 sur $\mathcal{N}(A_{n+1},\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$, 0 sur $\mathcal{N}(A_{n+1},2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})^c$ et telle que $|\partial_{(\varepsilon,\lambda)}\psi_{n+1}|\leqslant C\gamma^{-1}N_{n+1}^{\frac{\sigma}{2}}$. On définit alors la fonction h_{n+1} sur $[0,\varepsilon_2[\times\Lambda$ par :

$$\forall(\varepsilon,\lambda)\in[0,\varepsilon_2[\times\Lambda,\ h_{n+1}(\varepsilon,\lambda)=\begin{cases}\psi_{n+1}(\varepsilon,\lambda)\widetilde{h}_{n+1}(\varepsilon,\lambda) & \text{si } (\varepsilon,\lambda)\in\mathcal{N}(A_{n+1},2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})\\ 0 & \text{si } (\varepsilon,\lambda)\in\mathcal{N}(A_{n+1},2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})^c\end{cases}$$

• h_{n+1} est bien $\mathcal{C}^1$ car ψ_{n+1} et $\widetilde{h}_{n+1}$ le sont sur $\mathcal{N}(A_{n+1},2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$. De plus, comme ψ_{n+1} et à valeurs dans $[0,1]$ et que $\widetilde{h}_{n+1}$ est à valeurs dans $\mathcal{B}_{n+1}$, alors h_{n+1} est à valeurs dans $\mathcal{B}_{n+1}$.
• Par construction, on a bien $h_{n+1}=\widetilde{h}_{n+1}$ sur $\mathcal{N}(A_{n+1},\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$.
• Soit $\lambda\in\Lambda$.
Si $(0,\lambda)\in\mathcal{N}(A_{n+1},2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$, alors d'après la remarque faite à la fin de l'étape 2, on a $\widetilde{h}_{n+1}(0,\lambda)=0$ et donc $h_{n+1}(0,\lambda)=0$.
Sinon $(0,\lambda)\in\mathcal{N}(A_{n+1},2\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})^c$ et dans ce cas on a directement $h_{n+1}(0,\lambda)=0$.
D'où $\forall\lambda\in\Lambda,\ h_{n+1}(0,\lambda)=0$.
• Comme ψ_{n+1} est à valeurs dans $[0,1]$, on a par construction de $\widetilde{h}_{n+1}$:

$$\| h_{n+1} \|_{s_0}\leqslant|\psi_{n+1}|\ \| \widetilde{h}_{n+1} \|_{s_0}\leqslant\rho_{n+1}=N_{n+1}^{-\sigma-1}.$$

• Par dérivation d'un produit, le lemme précédent, la construction de ψ_{n+1} et pour N_0 assez grand, on a :

$$\| \partial_{(\varepsilon,\lambda)}h_{n+1} \|_{s_0}\leqslant|\partial_{(\varepsilon,\lambda)}\psi_{n+1}|\ \| \widetilde{h}_{n+1} \|_{s_0}+|\psi_{n+1}|\ \| \partial_{(\varepsilon,\lambda)}\widetilde{h}_{n+1} \|_{s_0}\leqslant C\gamma^{-1}N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}-1}+\frac{1}{2}N_{n+1}^{-\nu-1}\leqslant N_{n+1}^{-\nu-1}.$$

On peut donc enfin poser $u_{n+1}=u_n+h_{n+1}$.

Lemme 2.15. *u_{n+1} est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $[0,\varepsilon_2[\times\Lambda$ et satisfaisant aux propriétés $(P1)_{n+1}$, $(P2)_{n+1}$, $(P3)_{n+1}$ et $(P4)_{n+1}$.*

<u>Preuve :</u>
• u_{n+1} est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $[0,\varepsilon_2[\times\Lambda$, car u_n et h_{n+1} le sont.
• Comme $h_{n+1}=\widetilde{h}_{n+1}$ sur $\mathcal{N}(A_{n+1},\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}})$, il vent par construction de $\widetilde{h}_{n+1}$:

$$\forall(\varepsilon,\lambda)\in\mathcal{N}(A_{n+1},\gamma N_{n+1}^{-\frac{\sigma}{2}}),\ \Pi_{n+1}F(\varepsilon,\lambda,u_{n+1}(\varepsilon,\lambda))=\Pi_{n+1}F(\varepsilon,\lambda,u_n(\varepsilon,\lambda)+\widetilde{h}_{n+1}(\varepsilon,\lambda))=0$$

D'où u_{n+1} satisfait $(P3)_{n+1}$.
• Soit $k\in[\![1,n+1]\!]$. Si $k\in[\![1,n]\!]$, alors par $(P2)_n$, il vient

$$\parallel u_k-u_{k-1}\parallel_{s_0}\leqslant N_k^{-\sigma-1}\ \text{et}\ \parallel\partial_{(\varepsilon,\lambda)}(u_k-u_{k-1})\parallel_{s_0}\leqslant N_k^{-\nu-1}.$$

Il reste donc à vérifier cette propriété pour $k=n+1$. Par construction de h_{n+1} et $\widetilde{h}_{n+1}$ et par le lemme d'extension on a :

$$\parallel u_{n+1}-u_n\parallel_{s_0}=\parallel h_{n+1}\parallel_{s_0}\leqslant N_{n+1}^{-\sigma-1}$$

et

$$\parallel\partial_{(\varepsilon,\lambda)}(u_{n+1}-u_n)\parallel_{s_0}=\parallel\partial_{(\varepsilon,\lambda)}h_{n+1}\parallel_{s_0}\leqslant N_{n+1}^{-\nu-1}.$$

D'où u_{n+1} satisfait $(P2)_{n+1}$.
• Soit $(\varepsilon,\lambda)\in[0,\varepsilon_2[\times\Lambda$.
➢ Comme $E_n\subset E_{n+1}$, que par $(P1)_n$ on a $u_n(\varepsilon,\lambda)\in E_n$ et que $h_{n+1}(\varepsilon,\lambda)\in\mathcal{B}_{n+1}\subset E_{n+1}$, il vient :

$$u_{n+1}(\varepsilon,\lambda)\in E_{n+1}.$$

➢ Comme par $(P1)_n$ on a $u_n(0,\lambda)=0$ et que par le lemme d'extension on a $h_{n+1}(0,\lambda)=0$, il vient :

$$u_{n+1}(0,\lambda)=0.$$

➢ Par construction, on a : $u_{n+1}=u_n+h_{n+1}=u_{n-1}+h_n+h_{n+1}=...=u_0+\sum_{k=0}^{n}h_{k+1}$.
On en déduit que pour N_0 suffisamment grand, on a :

$$\parallel u_{n+1}\parallel_{s_0}\leqslant\parallel u_0\parallel_{s_0}+\sum_{k=0}^{n}\parallel h_{k+1}\parallel\leqslant\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^{n}N_{k+1}^{-\sigma-1}\leqslant 1.$$

➢ De même, pour N_0 suffisamment grand on a :

$$\parallel\partial_{(\varepsilon,\lambda)}u_{n+1}\parallel_{s_0}\leqslant\parallel\partial_{(\varepsilon,\lambda)}u_0\parallel_{s_0}+\sum_{k=0}^{n}\parallel\partial_{(\varepsilon,\lambda)}h_{k+1}\parallel\leqslant\frac{K_0(\gamma)}{2}N_0^{\frac{\sigma}{2}}+\sum_{k=0}^{n}N_{k+1}^{-\nu-1}\leqslant K_0(\gamma)N_0^{\frac{\sigma}{2}}.$$

D'où u_{n+1} satisfait $(P1)_{n+1}$.
• On pose $B_{n+1}=1+\parallel u_{n+1}\parallel_{\overline{s}}$ et $B'_{n+1}=1+\parallel\partial_{(\varepsilon,\lambda)}u_{n+1}\parallel_{\overline{s}}$.
➢ Par le lemme d'estimée en grande norme et $(P4)_n$, on a pour N_0 suffisamment grand :

$$B_{n+1}\leqslant B_n+\parallel h_{n+1}\parallel_{\overline{s}}\leqslant B_n+\parallel\widetilde{h}_{n+1}\parallel_{\overline{s}}\leqslant 2N_{n+1}^{\mu+\nu}+N_{n+1}^{2(\mu+\nu)}\leqslant 2N_{n+2}^{\mu+\nu}.$$

➢ De même, par le lemme d'estimées des dérivées et pour N_0 suffisamment grand, on a :

$$\begin{array}{rcl}B'_{n+1}&\leqslant&B'_n+\parallel\partial_{(\varepsilon,\lambda)}h_{n+1}\parallel_{\overline{s}}\\&\leqslant&B'_n+|\partial_{(\varepsilon,\lambda)}\psi_{n+1}|\parallel\widetilde{h}_{n+1}\parallel_{\overline{s}}+\parallel\partial_{(\varepsilon,\lambda)}\widetilde{h}_{n+1}\parallel_{\overline{s}}\\&\leqslant&2N_{n+1}^{\mu+\nu+\frac{\sigma}{2}}+C\gamma^{-1}N_{n+1}^{2(\mu+\nu)+\frac{\sigma}{2}}+N_{n+1}^{2(\mu+\nu)+\sigma}\\&\leqslant&2N_{n+2}^{\mu+\nu+\frac{\sigma}{2}}\end{array}$$

D'où u_{n+1} satisfait $(P4)_{n+1}$.

d)Conclusion du sous-théorème Il reste à montrer la convergence dans l'espace $\mathcal{C}^1([0,\varepsilon_2[\times\Lambda, X_{s_0+\nu})$ muni de la norme $\mathcal{C}^1$ $\| \cdot \|_{\mathcal{C}^1} = \| \cdot \|_{s_0+\nu} + \| \partial_{(\varepsilon,\lambda)} \cdot \|_{s_0+\nu}$

• D'après ce qui précède, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathcal{C}^1([0,\varepsilon_2[\times\Lambda, E_n) \subset \mathcal{C}^1([0,\varepsilon_2[\times\Lambda, X_{s_0+\nu})$.

• Comme $(\mathcal{C}^1([0,\varepsilon_2[\times\Lambda, X_{s_0+\nu}), \| \cdot \|_{\mathcal{C}^1})$ est un espace de Banach, prouver la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ revient à prouver l'absolue convergence de la série télescopique associée.

D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \| u_n - u_{n-1} \|_{s_0+\nu} &\leqslant C(s_0) \sum_{n=1}^{+\infty} N_n^{\nu} \| u_n - u_{n-1} \|_{s_0} && \text{par } (S1)\\
&\leqslant C(s_0) \sum_{n=1}^{+\infty} N_n^{\nu-\sigma-1} && \text{par } (P2)_n\\
&\leqslant C(s_0) \sum_{n=1}^{+\infty} N_n^{-1} && \text{par } (P).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \| \partial_{(\varepsilon,\lambda)}(u_n - u_{n-1}) \|_{s_0+\nu} &\leqslant C(s_0) \sum_{n=1}^{+\infty} N_n^{\nu} \| u_n - u_{n-1} \|_{s_0} && \text{par } (S1)\\
&\leqslant C(s_0) \sum_{n=1}^{+\infty} N_n^{-1} && \text{par } (P2)_n
\end{aligned}$$

La dernière série étant absolument convergente, on en déduit la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un certain $u \in \mathcal{C}^1([0,\varepsilon_2[, X_{s_0+\nu})$.

Finalement, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\lambda \in \Lambda$, $u_n(0,\lambda) = 0$ et qu'on a convergence uniforme, alors

$$\forall \lambda \in \Lambda,\ u(0,\lambda) = 0.$$

Soit $(\varepsilon,\lambda) \in A_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Alors :

$$\begin{aligned}
\| F(\varepsilon,\lambda,u) \|_{s_0} &\leqslant \| \Pi_n(F(\varepsilon,\lambda,u) - F(\varepsilon,\lambda,u_n)) \|_{s_0} + \| (Id - \Pi_n)F(\varepsilon,\lambda,u) \|_{s_0} && \text{par } (P3)_n\\
&\leqslant C(s_0) (\| u_n \|_{s_0+\nu} \| u - u_n \|_{s_0} + \| u - u_n \|_{s_0+\nu}) + \| (Id - \Pi_n)F(\varepsilon,\lambda,u) \|_{s_0} && \text{par } (S1) \text{ et } (F6)\\
&\leqslant C(s_0) \| u - u_n \|_{s_0+\nu} + \| (Id - \Pi_n)F(\varepsilon,\lambda,u) \|_{s_0} && \text{par } (P1)_n, (S1) \text{ et } (S2)
\end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 par convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers u dans $(\mathcal{C}^1([0,\varepsilon_2[\times\Lambda, X_{s_0+\nu}), \| \cdot \|_{\mathcal{C}^1})$ et d'après la troisième remarque faite après l'introduction des projections.

e)Preuve du théorème On pose $\overline{K} = K_0(\gamma) N_0^{\frac{\sigma}{2}}(\gamma)$ et $\varepsilon_3 = \min(\varepsilon_1(\gamma,\overline{K}), \varepsilon_2(\gamma))$. Soit $\varepsilon \in [0,\varepsilon_3[$.
Compte tenu du travail déjà effectué, il ne reste qu'à prouver que, en posant $\mathcal{C}_\gamma = A_\infty^c$, on a :

$$|\mathcal{C}_\gamma \cap ([0,\varepsilon[\times\Lambda)| \leqslant C\gamma\varepsilon.$$

Soit M comme dans l'hypothèse (L). Soit $N_0 \geqslant M$. On pose $H = G_{\gamma,\mu}^{(M)}(0)$, $G_0 = G_{\gamma,\mu}^{(N_0)}(0)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = G_{\gamma,\mu}^{(N_n)}(u_{n-1})$. Alors, par construction, $A_\infty = \bigcap_{n=0}^{+\infty} G_n$ et, en notant c en exposant pour désigner le complémentaire dans $[0,\varepsilon[\times\Lambda$, on a :

$$A_\infty^c = \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} G_n \right)^c = \bigcup_{n=0}^{+\infty} G_n^c \subset H^c \cup (G_0^c \backslash H^c) \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} (G_n^c \backslash G_{n-1}^c).$$

D'où l'on déduit :

$$|\mathcal{C}_\gamma| = |A_\infty^c| \leqslant |H^c| + |G_0^c \backslash H^c| + \sum_{n=1}^{+\infty} |G_n^c \backslash G_{n-1}^c| \leqslant C\gamma\varepsilon(1 + M^{-1}) + \sum_{n=1}^{+\infty} C\gamma\varepsilon N_{n-1}^{-1} \leqslant 2C\gamma\varepsilon.$$

La première inégalité étant due à l'inégalité de Boole et la seconde à l'hypothèse (L) car, par $(P1)_n$, $u_n \in \mathcal{U}_{\overline{K}}^{(N_n)}$ et, par $(P2)_n$, $\| u_n - u_{n-1} \|_{s_0} \leqslant N_n^{-\sigma-1}$.

2.2.3 Extension du théorème de Nash-Moser

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $\gamma > 0$, pour toute fonction $\mathcal{K} : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$ croissante, on pose :

- $J^{(N)}_{\gamma,\mu,\mathcal{K}} = \left\{ (\varepsilon, \lambda, u) \in [0, \varepsilon_0[\times \Lambda \times E^{(N)} / \begin{array}{l} L^{(N)}(\varepsilon, \lambda, u) \text{ est inversible et} \\ \forall s \geqslant s_0, \forall h \in E^{(N)}, \| L^{(N)}(\varepsilon, \lambda, u)^{-1}[h] \|_s \leqslant \mathcal{K}(s) \frac{N^\mu}{\gamma} (\| h \|_s + \| u \|_s \| h \|_{s_0}) \end{array} \right\}$
- pour tout $u \in \mathcal{U}^{(N)}_K$, $G^{(N)}_{\gamma,\mu,\mathcal{K}}(u) = \left\{ (\varepsilon, \lambda) \in [0, \varepsilon_0[\times \Lambda / (\varepsilon, \lambda, u(\varepsilon, \lambda)) \in J^{(N)}_{\gamma,\mu,\mathcal{K}} \right\}$.

De même on considère l'hypothèse $(L_\mathcal{K})$, analogue de l'hypothèse (L) en remplaçant $G^{(N)}_{\gamma,\mu}(\cdot)$ par $G^{(N)}_{\gamma,\mu,\mathcal{K}}(\cdot)$.
Alors on admet que le théorème de la section 2 se "prolonge" en le théorème suivant :

Théorème 2.16 (admis)**.** *On suppose que $S = +\infty$ et que les hypothèses $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, $(F4)$ et $(L_\mathcal{K})$ sont vérifiées.*
Alors les conclusions du théorème de la section 2 reste valable pour $u \in \mathcal{C}^1([0, \varepsilon_3[\times \Lambda, X)$.

2.3 Un autre aspect de rupture avec le théorème des fonctions implicites : la théorie de la bifurcation

Comme ce stage est censé déboucher sur une thèse, on place ici une très brève (car ce n'est pas l'objet de ce stage) présentation de cet outil d'analyse non-linéaire qu'est la théorie de la bifurcation. L'essentiel de cette sous partie est tirée de [Ki00] et [CR71].
L'idée principale de la théorie de la bifurcation est de rechercher des solutions d'une équation du type

$$F(\lambda, u) = 0 \ (\star)$$

où $F : \mathbb{R} \times X \to Y$ est une fonction d'une certaine régularité (a minima continue) avec X et Y deux espaces de Banach, connaissant le fait que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, F(\lambda, 0) = 0$ (solution triviale). En faisant varier le paramètre λ, on va chercher à capter des solutions non-triviales de l'équation $(\star)$ proche de la solution triviale.
Pour que cela soit possible, le théorème des fonctions implicites demande que la différentielle partielle en la seconde variable soit non-inversible (sinon on a un difféomorphisme local et donc aucune chance de voir deux solutions distinctes en un endroit). Cette condition est assurée par exemple lorsque son noyau est non-trivial.
Plus précisément, un des théorèmes principaux de cette théorie utilisé par mon encadrant dans ses récents travaux ([DHR18], [HMV12] et [HH14] pour n'en citer que trois) est le théorème suivant.

Théorème 2.17 (Crandall-Rabinowitz)**.** *Soient X et Y deux espaces de Banach. Soit V un voisinage de 0 dans X. Soit $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \to & Y \\ (\lambda, x) & \mapsto & F(\lambda, x) \end{array}$ une fonction continue. On suppose que :*

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, F(\lambda, 0) = 0$,
- *Les dérivées partielles $\partial_\lambda F$, $\partial_x F$ et $\partial_{\lambda x} F$ existent et sont continues,*
- *il existe $x_0 \in X$ tel que $\ker(\partial_x F(0,0)) = \langle x_0 \rangle$ et $Y / Im(\partial_x F(0,0))$ est unidimensionnel,*
- *$\partial_\lambda \partial_x F(0,0) x_0 \notin Im(\partial_x F(0,0))$ (condition de transversalité).*

Si χ est supplémentaire de $\ker(\partial_x F(0,0))$ dans X, alors il existe un voisinage U de $(0,0)$ dans $\mathbb{R} \times X$, un intervalle $]-a, a[$ $(a > 0)$ et deux fonctions continues $\psi :]-a, a[\to \mathbb{R}$ et $\phi :]-a, a[\to Y$ telles que $\psi(0) = 0$, $\phi(0) = 0$ et

$$\{(\lambda, x) \in U / F(\lambda, x) = 0\} = \{(\psi(s), s x_0 + s\phi(s)) / |s| < a\} \cup \{(\lambda, 0) \in U\}.$$

3 Application aux EDP

On donne ici quelques exemples de résultats d'existence de solutions quasi-périodiques à certaines EDP. Comme annoncé dans l'introduction, ces résultats proviennent de l'école italienne qui s'est beaucoup intéressée ces dernières années à ce type de résultats.

3.1 Solutions périodiques à NLW

3.1.1 Cadre fonctionnel et énoncé du résultat

Le premier résultat concerne l'équation des ondes et est une application directe du théorème appliqué "à la Nash-Moser" de la section 2. Le théorème est d'ailleurs extrait du même article [BBP09]. On s'intéresse à l'équation des ondes non-linéaire suivante ($\mathcal{M}$ désignant $\mathbb{S}^d$ ou $\mathbb{T}^d$ $(d \in \mathbb{N}^*)$) :

$$\partial_{tt} u - \Delta u + V(x) u = \varepsilon f(\omega t, x, u)$$

où $x \in \mathcal{M}$, $V \in \mathcal{C}^p(\mathcal{M}, \mathbb{R}_+)\backslash\{0\}$ avec $p > \max(2, \frac{d}{2})$ et $f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R} \times \mathcal{M} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour un certain $q \in \mathbb{N}$. On suppose $f(\cdot, x, u)$ 2π-périodique.

On cherche des solutions u périodiques en temps de cette équation. Pour plus de commodité, on fait un changement de variable $t \mapsto \omega t$ pour se ramener à la recherche de solutions périodiques de l'équation

$$\omega^2 \partial_{tt} u - \Delta u + V(x)u - \varepsilon f(t, x, u) = 0 \ (\star)$$

Il nous faut donner le cadre fonctionnel de travail. On va chercher des solutions de $(\star)$ en appliquant le théorème de Nash-Moser présenté plus haut dans l'échelle Sobolev en temps et espace, périodique en temps. On va se restreindre aux paramètres vérifiant certaines conditions diophantiennes. Pour cela on considère pour $\varepsilon_0 > 0$, $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$, $\tau \geqslant d + 2$ et $\tau_0 > 1$ l'ensemble des paramètres suivants

$$G = \left\{ (\varepsilon, \omega) \in [0, \varepsilon_0[\times]\omega_1, \omega_2[/ \begin{array}{l} \forall l \in \mathbb{Z}, \forall j \in \mathbb{N}, \forall k \in [1, d_j], |\omega^2 l^2 - \omega_{j,k}^2| \geqslant \frac{\gamma}{1+|l|^\tau} \text{ et} \\ \forall (l, p) \in \mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\}, |\omega l - \frac{2\pi}{T} p| \geqslant \frac{\gamma}{(1+|l|)^{\tau_0}} \end{array} \right\},$$

où $T > 0$ désigne la plus petite période du flot géodésique de $\mathcal{M}$ pouvant être renormalisé à 1 et les $(\omega_{j,k}^2)_{j,k}$ sont les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta + V(x)$.

a) Les espaces de fonctions Pour tout $(s, s') \in (\mathbb{R}_+)^2$, on pose :

$$H^{s,s'} := H^s(\mathbb{T}, H^{s'}(\mathcal{M}, \mathbb{R})).$$

Une fonction $u \in H^{s,s'}$ s'écrit formellement (de manière unique) :

$$u = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{ilt} u_l \text{ où } u_l = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_{l,n} \varphi_n \in H^{s'}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$$

avec $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une base orthonormée de fonctions propres d'un opérateur auto-adjoint à résolvante compacte défini sur $H^{s'}(\mathcal{M}, \mathbb{R})$.
On munit $H^{s,s'}$ de la norme :

$$\| u \|_{s,s'}^2 = \| \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{ilt} u_l \|_{s,s'}^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle l \rangle^{2s} \| u_l \|_{H^{s'}(\mathcal{M}, \mathbb{R})}^2$$

où $\langle l \rangle = \max(1, |l|)$ et

$$\| u_l \|_{H^{s'}(\mathcal{M}, \mathbb{R})}^2 = \| \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_{l,n} \varphi_n \|_{H^{s'}(\mathcal{M}, \mathbb{R})}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + \lambda_n)^{s'} |u_{l,n}|^2$$

avec $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de valeurs propres associées aux fonctions propres $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.
Exemple utile pour la suite :
Pour $u \in H^{0,0}$, on a $u = \sum_{(l,n) \in \mathbb{Z}^2} u_{l,n} e^{ilt} \varphi_n$ et $\| u \|_{0,0}^2 = \sum_{(l,n) \in \mathcal{Z}^2} |u_{l,n}|^2$.
Dans la suite, on se fixe un $s_1 \in]\max(2, \frac{d}{2}), p]$, on note $H^s := H^{s,s_1}$ et on note sa norme $\| \cdot \|_s := \| \cdot \|_{s,s_1}$.
Ce faisant, par injection de Sobolev, on a :

$$H^{s_1}(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathcal{M}, \mathbb{R}) \text{ est une algèbre de Banach et } \forall s > \frac{1}{2}, H^s \text{ est une algèbre de Banach.}$$

Pour les suites $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on prend les valeurs propres et les fonctions propres de l'opérateur auto-adjoint positif $-\Delta + V(x)$. On note $(\omega_{j,k}^2)_{j,k}$ les valeurs propres et $(\varphi_{j,k})_{j,k}$ les fonctions propre associées. On a la répartition suivante des $\omega_{j,k}$:

Lemme 3.1 (admis). *Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $c_0 > 0$, $C_0 > 0$, $\delta \in]0, 1[$ et une suite de segments disjoints $(I_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ tels que I_1 soit à gauche de I_2 et :*

$$\forall j \geqslant 2, I_j = \left[\frac{2\pi}{T} + \alpha - \frac{c_0}{j^\delta}, \frac{2\pi}{T} + \alpha + \frac{c_0}{j^\delta} \right]$$

avec $(\omega_{j,k})_{j,k} \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} I_j$, $\omega_{j,k} \in I_j$ et $Card((\omega_{j,k})_{j,k} \cap I_j) := d_j \leqslant C_0 j^{d-1}$; $k \in [\![1, d_j]\!]$.

Remarque : La racine du spectre est donc répartie en grappe dans des intervalles se décalant vers la droite en dont la taille diminue.

On considère les sous-espaces de H^0 de troncature en temps :

$$E^{(N)} = \left\{ u = \sum_{|l| \leqslant N} e^{ilt} u_l / \forall l \in [-N, N], u_l \in H^{s_1}(\mathcal{M}, \mathbb{C}) \text{ et } \overline{u_l} = u_{-l} \right\}.$$

On considère $(\Pi^{(N)})_{N \in \mathbb{N}}$ la famille des projecteurs orthogonaux au sens L^2 associée aux $(E^{(N)})_{N \in \mathbb{N}}$. Trivialement, les hypothèses $(S1)$ et $(S2)$ sont vérifiées.

b)L'énoncé du théorème

Théorème 3.2. *Soit $0 < \omega_1 < \omega_2$, alors il existe $s^* > \frac{1}{2}$ et $k^* \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $f \in \mathcal{C}^{k^*}(\mathbb{T} \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R})$, pour tout $\gamma \in]0, 1[$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\gamma) > 0$ et un application $u \in \mathcal{C}^1([0, \varepsilon_0[\times]\omega_1, \omega_2[, H^{s^*})$ tels que*

- $\forall \omega \in]\omega_1, \omega_2[, u(0, \omega) = 0,$
- $\forall (\varepsilon, \omega) \in [0, \varepsilon_0[\times]\omega_1, \omega_2[\backslash \mathcal{C}_\gamma, u(\varepsilon, \omega)$ *est solution de* $(\star)$ *où* $\mathcal{C}_\gamma$ *est un ensemble de Cantor vérifiant :*

$$|\mathcal{C}_\gamma| \lesssim \gamma \varepsilon_0 \text{ et } \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0], |\mathcal{C}_\gamma \cap ([0, \varepsilon[\times]\omega_1, \omega_2[)| \lesssim \gamma \varepsilon.$$

c) La fonctionnelle d'intérêt On considère l'opérateur $Q = (-\Delta + V(x) + Id)^{-1}$ vérifiant l'estimation de régularité elliptique :

$$\forall u \in H^{s,s'}, \| (-\Delta + V(x) + Id)^{-1} u \|_{s,s'} \leqslant \| u \|_{s, \max(0, s'-2)} .$$

La fonctionnelle à laquelle on va appliquer le procédé de Nash-Moser est définie par :

$$F(\varepsilon, \omega, u) = \omega^2 Q \partial_{tt} u + u - Qu - \varepsilon Q f(t, x, u)$$

Les linéarisés associés (avant et après application de l'opérateur Q) sont :

$$\forall v \in E^{(N)}, \mathcal{L}^{(N)}(u)[v] := \mathcal{L}^{(N)}(\varepsilon, \omega, u)[v] := \omega^2 \partial_{tt} v - \Delta v + V(x) v - \varepsilon \Pi^{(N)}(b(t, x) v)$$

et

$$\forall v \in E^{(N)}, L^{(N)}(u)[v] := L^{(N)}(\varepsilon, \omega, u)[v] := \omega^2 Q \partial_{tt} v + v - Qv - \varepsilon \Pi^{(N)} Q(b(t, x) v)$$

où on a posé $b(t, x) = (\partial_u f)(t, x, u(t, x))$.

Proposition 3.3. *On suppose $S = k - s_1 - 2 > s_0 > \frac{1}{2}$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T} \times \mathcal{M} \times \mathbb{R})$. Alors $F : [0, \varepsilon_0[\times]\omega_1, \omega_2[\times H^{s_0+2} \to H^{s_0}$ est une application de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant les propriétés $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$ et $(F4)$ pour $s \in [s_0, S]$.*

3.1.2 Estimées sur les linéarisés

On aura besoin du lemme d'interpolation suivant :

Lemme 3.4 (interpolation)**.** *Soit $\tilde{s} > \frac{1}{2}$. Soit $s_1 > \frac{d}{2}$. Alors pour tout $s \geqslant \tilde{s}$ et pour tout $s'_1 \in [0, s_1]$, il existe $C_0(\tilde{s}) > 0$ et $C_1(\tilde{s}, s) > 0$ telles que :*

$$\forall b \in H^s, \forall u \in H^{s, s'_1}, \| bu \|_{s, s'_1} \leqslant C_0(\tilde{s}) \| b \|_{\tilde{s}} \| u \|_{s, s'_1} + C_1(\tilde{s}, s) \| b \|_s \| u \|_{\tilde{s}, s'_1} .$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\| bu \|_{s,s'_1}^2 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle m \rangle^{2s} \| \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l u_{m-l} \|_{H^{s'_1}(\mathcal{M}, \mathbb{R})}^2 \\
&\leqslant \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle m \rangle^{2s} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \| b_l u_{m-l} \|_{H^{s'_1}(\mathcal{M}, \mathbb{R})} \right)^2 && \text{inégalité triangulaire} \\
&\leqslant C(s_1) \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle m \rangle^{2s} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \| b_l \|_{H^{s_1}(\mathcal{M}, \mathbb{R})} \| u_{m-l} \|_{H^{s'_1}(\mathcal{M}, \mathbb{R})} \right)^2 && \text{algèbre, } H^{s_1} \hookrightarrow H^{s'_1} \text{ et Riesz-Thorin} \\
&\leqslant C(s_1)((P1) + (P2))
\end{aligned}$$

où $(P1)$ est la somme où les indices l sont restreints à la condition

$$(M): \ \frac{\langle m\rangle}{\langle m-l\rangle} \leqslant 1+\eta(s) \text{ avec } \eta(s)=2^{\frac{1}{s}}-1.$$

et $(P2)$ est la somme complémentaire.
On a :

$$\begin{aligned}
(P1) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{l\in(M)} \| b_l \|_{H^{s_1}(\mathcal{M},\mathbb{R})} \langle l\rangle^{\widetilde{s}} \| u_{m-l} \|_{H^{s_1'}(\mathcal{M},\mathbb{R})} \langle m-l\rangle^{s} \frac{\langle m\rangle^{s}}{\langle l\rangle^{\widetilde{s}}\langle m-l\rangle^{s}}\right)^2 \\
&\leqslant \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \| b_l \|^2_{H^{s_1}(\mathcal{M},\mathbb{R})} \langle l\rangle^{2\widetilde{s}} \| u_{m-l} \|^2_{H^{s_1'}(\mathcal{M},\mathbb{R})} \langle m-l\rangle^{2s}\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\frac{2}{\langle l\rangle^{2\widetilde{s}}}\right) \qquad \text{Cauchy-Schwarz} \\
&= C(\widetilde{s}) \| b \|^2_{\widetilde{s}} \| u \|^2_{s,s_1'}
\end{aligned}$$

De même on a $(P2) \leqslant C(s,\widetilde{s}) \| b \|^2_{s} \| u \|^2_{\widetilde{s},s_1'}$, ce qui donne le résultat.

a) Estimée sur le linéarisé $\mathcal{L}^{(N)}$

Proposition 3.5. *Pour tout $\tau>0$, pour tout $\tau_0>1$, il existe $\mu_0\geqslant 0$, $\widetilde{s}>\frac{1}{2}$, une fonction croissante $\mathcal{K}:\mathbb{R}_+\to[1,+\infty[$ et pour tout $\gamma>0$ il existe $\eta(\gamma)>0$ tels que si :*

- $\varepsilon(\| b \|_{\overline{s}}+1) \leqslant \eta(\gamma)$,
- $\forall (l,p)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{0,0\}, |\omega l-\frac{2\pi}{T}p| \geqslant \frac{\gamma}{(1+|l|)^{\tau_0}}$,
- $\forall 1\leqslant K\leqslant N, \| (\mathcal{L}^{(K)}(u))^{-1} \|_{0,0} \leqslant 4\frac{K^\tau}{\gamma}$

Alors, on a :

$$\forall s\geqslant\overline{s}, \forall h\in E^{(N)}, \| (\mathcal{L}^{(N)}(u))^{-1}[h] \|_{s,0} \leqslant \frac{\mathcal{K}(s)}{\gamma} N^{\mu_0}(\| h \|_{s,0}+\| b \|_{s} \| h \|_{\overline{s},0}).$$

Preuve :
On se fixe un $\rho>0$. De là, on considère l'ensemble des sites singuliers $\mathcal{S}=\mathcal{S}_{N,\rho,\omega}$ défini par :

$$\mathcal{S}:=\{l\in\mathbb{Z}\cap[-N,N] / \| D_l(\omega)^{-1} \|_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{M}))} > \frac{1}{\rho}\}$$

où $D_l(\omega):=-\omega^2 l^2-\Delta+V(x)$.
On définit alors l'ensemble des sites réguliers $\mathcal{R}:=\mathcal{R}_{N,\rho,\omega}$ comme le complémentaire dans $\mathbb{Z}\cap[-N,N]$: $\mathcal{R}=\mathcal{S}^c$.

Les sites singuliers sont "séparés" au sens du lemme suivant :

Lemme 3.6. *Soit ω vérifiant $\forall (l,p)\in\mathbb{Z}^2\backslash\{0,0\}, |\omega l-\frac{2\pi}{T}p| \geqslant \frac{\gamma}{(1+|l|)^{\tau_0}}$.*
Alors il existe $c(\gamma)>0$ et $\delta_0=\delta_0(\tau_0,\delta)\in]0,1[$ tels que :

$$\forall (l,l')\in\mathcal{S}^2, l\neq l' \Rightarrow |l-l'|\geqslant c(\gamma)(|l|+|l'|)^{\delta_0}.$$

Preuve (admise) :
Soit $(l,l')\in\mathcal{S}^2$ tel que $l\neq l'$. Par construction, il existe $(j,j')\in\mathbb{N}^2$ et $(k,k')\in[\![1,d_j]\!]\times[\![1,d_{j'}]\!]$ tels que :

$$|\omega l-\omega_{j,k}|\leqslant C\frac{\rho}{|l|} \text{ et } |\omega l'-\omega_{j',k'}|\leqslant C\frac{\rho}{|l'|}.$$

On a donc par la condition diophantienne :

$$\frac{\gamma}{(1+|l-l'|)^{\tau_0}} \leqslant |\omega(l-l')-\frac{2\pi}{T}(j-j')| \leqslant \frac{c}{|l|^\delta}+\frac{c}{|l'|^\delta}.$$

On en déduit le résultat voulu en utilisant $|l|+|l'|\leqslant 2\min(|l|,|l'|)+|l-l'|$.

On a :

$$E^{(N)}=E_{\mathcal{R}} \overset{\perp}{\oplus} E_{\mathcal{S}}$$

avec

$$E_{\mathcal{R}} := \left\{ u = \sum_{l \in \mathcal{R}} e^{ilt} u_l \in E^{(N)} \right\} \text{ et } E_{\mathcal{S}} := \left\{ u = \sum_{l \in \mathcal{S}} e^{ilt} u_l \in E^{(N)} \right\}$$

et $\Pi_{\mathcal{R}} : E^{(N)} \to E_{\mathcal{R}}$ et $\Pi_{\mathcal{S}} : E^{(N)} \to E_{\mathcal{S}}$ les projecteurs orthogonaux associés.
Pour $(\varepsilon, \omega) \in G$, on représente le linéarisé $\mathcal{L}^{(N)} := \mathcal{L}^{(N)}(u)$ matriciellement par :

$$\mathcal{L}^{(N)} = \begin{pmatrix} \Pi_{\mathcal{R}} \mathcal{L}^{(N)}_{|E_{\mathcal{R}}} & \Pi_{\mathcal{R}} \mathcal{L}^{(N)}_{|E_{\mathcal{S}}} \\ \Pi_{\mathcal{S}} \mathcal{L}^{(N)}_{|E_{\mathcal{R}}} & \Pi_{\mathcal{S}} \mathcal{L}^{(N)}_{|E_{\mathcal{S}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\mathcal{R}} & \mathcal{L}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{S}} \\ \mathcal{L}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{R}} & \mathcal{L}_{\mathcal{S}} \end{pmatrix}.$$

On remarque que si l'on note $\dagger$ pour désigner la transconjuguée, alors on a : $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{S}} = (\mathcal{L}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{R}})^\dagger$, $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}^\dagger = \mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ et $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}^\dagger = \mathcal{L}_{\mathcal{S}}$.
On souhaite inverser $\mathcal{L}^{(N)}$. On remarque que si l'on suppose l'inversibilité de $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ et celle de $U := \mathcal{L}_{\mathcal{S}} - \mathcal{L}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{R}} \mathcal{L}_{\mathcal{R}}^{-1} \mathcal{L}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{S}} : E_{\mathcal{S}} \to E_{\mathcal{S}}$, alors $\mathcal{L}^{(N)}$ est inversible et on a l'identité :

$$(\mathcal{L}^{(N)})^{-1} = \begin{pmatrix} Id & -\mathcal{L}_{\mathcal{R}}^{-1} \mathcal{L}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{S}} \\ 0 & Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\mathcal{R}}^{-1} & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id & 0 \\ -\mathcal{L}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{R}} \mathcal{L}_{\mathcal{R}}^{-1} & Id \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, on pose $\widetilde{s} := 1 + (\tau + 2)\delta_0^{-1}$.

Lemme 3.7 (inversibilité de $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$). *Pour $\varepsilon \parallel b \parallel_{\widetilde{s}}$ assez petit, $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ est inversible et on a :*

$$\forall s \geqslant \widetilde{s}, \forall h \in E_{\mathcal{R}}, \parallel \mathcal{L}_{\mathcal{R}}^{-1}[h] \parallel_{s,0} \leqslant 2\rho^{-1} \parallel h \parallel_{s,0} + \rho^{-2} \varepsilon C(s) \parallel b \parallel_s \parallel h \parallel_{\widetilde{s},0} .$$

<u>Preuve :</u>
On décompose $\mathcal{L}_{\mathcal{R}} = D_{\mathcal{R}} + T_{\mathcal{R}}$ où $D_{\mathcal{R}}[h] := \Pi_{\mathcal{R}}(\omega^2 \partial_{tt} h - \Delta h + V(x) h)$ et $T_{\mathcal{R}} := \Pi_{\mathcal{R}}(-\varepsilon \Pi^{(N)}(bh))$.
D'une part, par construction, on a $\parallel (D_{\mathcal{R}})^{-1} \parallel_{s,0} \leqslant \rho^{-1}$.
D'autre part, par le lemme d'interpolation on a : $\parallel T_{\mathcal{R}}[h] \parallel_{s,0} \leqslant \varepsilon C_0(\widetilde{s}) \parallel b \parallel_{\widetilde{s}} \parallel h \parallel_{s,0} + \varepsilon C_1(s, \widetilde{s}) \parallel_s \parallel h \parallel_{\widetilde{s},0}$.
D'où par le lemme d'inversibilité préliminaire de la section 2, il vient pour $\rho^{-1} \varepsilon C_0(\widetilde{s}) \parallel b \parallel_{\widetilde{s}} < \frac{1}{2}$, $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ est inversible et :

$$\parallel \mathcal{L}_{\mathcal{R}}^{-1}[h] \parallel_{s,0} \leqslant 2\rho^{-1} \parallel h \parallel_{s,0} + \rho^{-2} \varepsilon 4 C_1(s, \widetilde{s}) \parallel b \parallel_s \parallel h \parallel_{\widetilde{s},0} .$$

Lemme 3.8 (inversibilité de U). *Pour $\varepsilon(\parallel b \parallel_{\widetilde{s}} + 1) \leqslant \eta(\gamma)$ assez petit et $\mu_0 = 2\tau + 2$, U est inversible et on a :*

$$\forall s \geqslant \widetilde{s}, \forall h \in E_{\mathcal{S}}, \parallel U^{-1}[h] \parallel_{s,0} \leqslant \frac{\mathcal{K}(s)}{\gamma} N^{\mu_0} (\parallel h \parallel_{s,0} + \parallel b \parallel_s \parallel h \parallel_{0,0}).$$

<u>Preuve :</u>
L'opérateur U peut se représenter matriciellement par $U = (U_l^{l'})_{(l,l') \in \mathcal{S}^2}$.
On admet que pour tout $(l, l') \in \mathcal{S}^2$, on a :

$$(i) \ \parallel (U_l^l)^{-1} \parallel_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{M},\mathbb{R}))} \leqslant C \frac{|l|^\tau}{\gamma} \text{ et } (ii) \ \parallel U_l^{l'} \parallel_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{M},\mathbb{R}))} \leqslant \frac{C(s)\varepsilon \parallel b \parallel_s}{|l - l'|^{s - \frac{1}{2}}}.$$

On écrit $U = \mathcal{D}(Id + \mathcal{D}^{-1}\mathcal{P})$ avec $\mathcal{D} = \text{diag}(U_l^l)_{l \in \mathcal{S}}$ et $\mathcal{P} = U - \mathcal{D}$.
Soit $L_1 \in \mathbb{N}^*$, alors :

-
$$\begin{aligned} \parallel (Id - \Pi^{(L_1)}) \mathcal{D}^{-1} \mathcal{P}[h] \parallel_{s,0} &\leqslant \sum_{l \in \mathcal{S}, |l| > L_1} |l|^s \parallel (U_l^l)^{-1} \sum_{l' \in \mathcal{S} \setminus \{l\}} U_l^{l'} h_{l'} \parallel_{L^2(\mathcal{M},\mathbb{R})} \\ &\leqslant C \sum_{l \in \mathcal{S}, |l| > L_1} \frac{|l|^{s+\tau}}{\gamma} \left(\sum_{l' \in \mathcal{S} \setminus \{l\}} \parallel U_l^{l'} \parallel_{\mathcal{L}(L^2(\mathcal{M},\mathbb{R}))} \parallel h_{l'} \parallel_{L^2(\mathcal{M},\mathbb{R})} \right) \quad \text{par } (i) \\ &:= (P1) + (P2) \end{aligned}$$

où $(P1)$ désigne la partie de la somme dont les indices vérifient la condition $L_1 < |l| \leqslant 2|l'|$ et $(P2)$ la somme complémentaire.

Or d'une part, on a :

$$\begin{aligned}
(P1) &\leqslant C(\gamma,s)\sum_{l\in\mathcal{S},|l|>L_1}\varepsilon|l|^{s+\tau}\parallel b\parallel_{\widetilde{s}}\left(\sum_{|l'|\geqslant\frac{|l|}{2}}\frac{|l'|^s\parallel h_{l'}\parallel_{L^2(\mathcal{M},\mathbb{R})}}{|l'|^{s+\delta_0(\widetilde{s}-\frac{1}{2})}}\right) && \text{par } (ii)\ (s=\widetilde{s}),\ \text{séparation et } \delta_0\in]0,1[\\
&\leqslant C(\gamma,s)\sum_{l\in\mathcal{S},|l|>L_1}\varepsilon|l|^{s+\tau}\parallel b\parallel_{\widetilde{s}}\parallel h\parallel_{s,0}\left(\sum_{|l'|\geqslant\frac{|l|}{2}}|l'|^{-2s-\delta_0(2\widetilde{s}-1)}\right)^{\frac{1}{2}} && \text{par Cauchy-Schwarz}\\
&\leqslant \varepsilon C(\gamma,s)\parallel b\parallel_{\widetilde{s}}\parallel h\parallel_{s,0}\sum_{l\in\mathcal{S},|l|>L_1}|l|^{\tau+1-\delta_0\widetilde{s}}\\
&\leqslant \varepsilon C(\gamma,s)\parallel b\parallel_{\widetilde{s}}\parallel h\parallel_{s,0}L_1^{\tau+2-\delta_0\widetilde{s}} && \text{avec par choix de } \widetilde{s}, \tau+2-\delta_0\widetilde{s}>0
\end{aligned}$$

et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
(P2) &\leqslant \frac{C(s)}{\gamma}\sum_{l\in\mathcal{S}}|l|^{s+\tau}\frac{\varepsilon\parallel b\parallel_s}{|l|^{s-\frac{1}{2}}}\left(\sum_{|l'|<\frac{|l|}{2}}\parallel h_{l'}\parallel_{L^2(\mathcal{M},\mathbb{R})}\right) \quad \text{car } |l'-l|\geqslant\frac{|l|}{2}\\
&\leqslant \frac{C(s)}{\gamma}\varepsilon\parallel b\parallel_s\sum_{l\in\mathcal{S}}|l|^{\tau+1}\parallel h\parallel_{0,0}\\
&\leqslant \frac{C(s)}{\gamma}\varepsilon\parallel b\parallel_s\parallel h\parallel_{0,0}N^{\tau+2}
\end{aligned}$$

• De même on montre que

$$\parallel \Pi^{(L_1)}(\mathcal{D}^{-1}\mathcal{P}[h])\parallel_{s,0}\leqslant L_1^s\parallel\mathcal{D}^{-1}\mathcal{P}[h]\parallel_{0,0}\leqslant L_1^sC(\gamma)\varepsilon\parallel b\parallel_{\widetilde{s}}\parallel h\parallel_{0,0}.$$

• Finalement, en choisissant L_1 suffisamment grand, on déduit l'existence d'un $\eta(\gamma)>0$ petit tel que pour $\varepsilon(\parallel b\parallel_{\widetilde{s}}+1)\leqslant\eta(\gamma)$, on ait :

$$\parallel\mathcal{D}^{-1}\mathcal{P}[h]\parallel_{s,0}\leqslant\frac{1}{2}\parallel h\parallel_{s,0}+C(s)\parallel b\parallel_s\parallel h\parallel_{0,0}N^{\tau+2}\ \text{et}\ \parallel\mathcal{D}^{-1}\mathcal{P}[h]\parallel_{0,0}\leqslant\frac{1}{2}\parallel h\parallel_{0,0}.$$

Donc, par le lemme d'inversibilité préliminaire de la section 2, on en déduit que $Id+\mathcal{D}^{-1}\mathcal{P}$ est inversible et que quitte à prendre $\mathcal{K}(s)$ assez grand :

$$\parallel(Id+\mathcal{D}^{-1}\mathcal{P})^{-1}[h]\parallel_{s,0}\leqslant 2\parallel h\parallel_{s,0}+4C(s)\parallel b\parallel_s\parallel h\parallel_{0,0}N^{\tau+2}.$$

Par ce résultat et (i), on en déduit que U est inversible et que :

$$\parallel U^{-1}[h]\parallel_{s,0}\leqslant\frac{\mathcal{K}(s)}{\gamma}N^{2\tau+2}(\parallel h\parallel_{s,0}+\parallel b\parallel_s\parallel h\parallel_{0,0}).$$

b) Estimée sur le linéarisé $L^{(N)}$

Proposition 3.9. *On se place sous les hypothèses de la proposition précédente. Alors pour tout $s\geqslant\widetilde{s}$, on a pour $\mu=\mu_0+s_1+2$ et $\mathcal{K}(s)$ suffisamment grand :*

$$\forall h\in E^{(N)},\parallel(L^{(N)}(u))^{-1}[h]\parallel_s\leqslant\frac{\mathcal{K}(s)}{\gamma}N^{\mu}(\parallel h\parallel_s+\parallel u\parallel_s\parallel h\parallel_{\widetilde{s}}).$$

Preuve :
Soit $h\in E^{(N)}$ On pose $v=(L^{(N)}(u))^{-1}[h]$, i.e. $h=(L^{(N)}(u))[v]=v+Q(\omega^2\partial_{tt}v-v-\varepsilon\Pi^{(N)}(bv))$. Alors

$$\begin{aligned}
\parallel v\parallel_s &= \parallel h+Q(-\omega^2\partial_{tt}v+v+\varepsilon\Pi^{(N)}(bv))\\
&\leqslant \parallel h\parallel_s+\parallel Q(-\omega^2\partial_{tt}v+v+\varepsilon\Pi^{(N)}(bv))\parallel_s\\
&\leqslant \parallel h\parallel_s+\parallel -\omega^2\partial_{tt}v+v+\varepsilon\Pi^{(N)}(bv)\parallel_{s,s_1-2}\\
&\leqslant \parallel h\parallel_s+CN^2\parallel v\parallel_{s,s_1-2}+\varepsilon C(s)\parallel b\parallel_s\parallel v\parallel_{\widetilde{s},s_1-2} \quad \text{par le lemme d'interpolation}
\end{aligned}$$

En utilisant la relation "récurrente" $\parallel v\parallel_{\widetilde{s},s_1-2}\leqslant CN^2\parallel v\parallel_{\widetilde{s},\max(0,s_1-4)}+\parallel h\parallel_{\widetilde{s}}$, on obtient par itérations successives une estimation du type :

$$\parallel v\parallel\leqslant C(s)N^{s_1+2}(\parallel v\parallel_{s,0}+\parallel h\parallel_s+\parallel b\parallel_s\parallel v\parallel_{\widetilde{s},0}+\parallel b\parallel_s\parallel h\parallel_{\widetilde{s}}).$$

Enfin, en remarquant que $v = (\mathcal{L}^{(N)})^{-1}(-\Delta + V(x) + Id)h$ et que $Q^{-1} = -\Delta + V(x) + Id$ est un opérateur elliptique d'ordre 2 en espace, il vient en appliquant la proposition précédente :

$$\| v \|_{s,0} \leqslant \frac{\mathcal{K}(s)}{\gamma} N^{\mu_0}(\| h \|_{s,2} + \| b \|_s \| h \|_{\widetilde{s},2}).$$

Finalement en combinant avec le fait que $\| b \|_s \leqslant C(s)(1 + \| u \|_s)$ et que comme $s_1 \geqslant 2$, on a par injection de H^{s_1} dans H^2 (quitte à modifier un peu $\mathcal{K}(s)$) :

$$\| v \|_{s,0} \leqslant \frac{\mathcal{K}(s)}{\gamma} N^{\mu_0}(\| h \|_s + \| u \|_s \| h \|_{\widetilde{s}}).$$

En rassemblant les résultats précédents, on trouve l'énoncé de la proposition.

3.1.3 Vérification de l'hypothèse $(L_{\mathcal{K}})$

Il convient d'abord de définir les ensembles de paramètres d'intérêt. On pose :

$$J^{(N)}_{\gamma,\mu,\mathcal{K}} = \left\{(\varepsilon,\omega,u) \in [0,\varepsilon_0 \times]\omega_1,\omega_2[\times E^{(N)} / (\varepsilon,\omega) \in G, \| u \|_{s_0} \leqslant 1 \text{ et } \forall 1 \leqslant K \leqslant N, \| (\mathcal{L}^{(K)}(u))^{-1} \|_{0,0} \leqslant 4\frac{K^\tau}{\gamma}\right\},$$

D'après les deux propositions de la sous-section précédente, on a, pour $\mu = \mu_0 + s_1 + 2$, l'inclusion :

$$J^{(N)}_{\gamma,\mu,\mathcal{K}} \subset \left\{(\varepsilon,\lambda,u) \in [0,\varepsilon_0[\times\Lambda\times E^{(N)} / \begin{array}{l} L^{(N)}(\varepsilon,\lambda,u) \text{ est inversible et} \\ \forall s \in \{s_0,\overline{s}\}, \forall h \in E^{(N)}, \| L^{(N)}(\varepsilon,\lambda,u)^{-1}[h] \|_s \leqslant \mathcal{K}(s)\frac{N^\mu}{\gamma}(\| h \|_s + \| u \|_s \| h \|_{s_0}) \end{array}\right\}.$$

On pose encore :

$$\mathcal{U}^{(N)}_K = \left\{u \in \mathcal{C}^1([0,\varepsilon_0[\times]\omega_1,\omega_2[,E^{(N)}) / \| u \|_{s_0} \leqslant 1 \text{ et } \| \partial_{(\varepsilon,\omega)} u \|_{s_0} \leqslant K\right\},$$

et pour tout $u \in \mathcal{U}^{(N)}_K$,

$$G^{(N)}_{\gamma,\mu,\mathcal{K}}(u) = \left\{(\varepsilon,\omega) \in [0,\varepsilon_0[\times]\omega_1,\omega_2[/(\varepsilon,\omega,u(\varepsilon,\omega)) \in J^{(N)}_{\gamma,\mu,\mathcal{K}}\right\}.$$

On remarque que si l'on pose $B_K(u) = \left\{(\varepsilon,\omega) \in [0,\varepsilon_0[\times]\omega_1,\omega_2[/ \| (\mathcal{L}^{(N)}(u))^{-1} \|_{0,0} \leqslant 4\frac{K^\tau}{\gamma}\right\}$, alors on a :

$$G^{(N)}_{\gamma,\mu,\mathcal{K}}(u) = \bigcap_{1 \leqslant K \leqslant N} B_K(u) \cap G.$$

Enfin on prend $\sigma > \max(4(\mu+2), d+2)$ de sorte à ce que l'hypothèse (P) soit vérifiée.

a) Premier point

Lemme 3.10. *Soit $M > 0$ tel que $\varepsilon_0\gamma^{-1}M^\tau \| b \|_{\widetilde{s}} \leqslant c$ suffisamment petit. lors $G^{(M)}_{\gamma,\mu,\mathcal{K}}(0) = G$ et on a :*

$$\forall \varepsilon \in [0,\varepsilon_0[, |G^c \cap ([0,\varepsilon[\times]\omega_1,\omega_2[)| \leqslant C\gamma\varepsilon.$$

Preuve :

• Soit $K \in [1,M]$. Soit $h \in H^{0,0}$.
On décompose $\mathcal{L}^K(0) = D^{(K)} + T^{(K)}$ avec $D^{(K)}[h] := \omega^2\partial_{tt}h - \Delta h + V(x)h$ et $T^{(K)}[h] := -\varepsilon\Pi^{(K)}(bh)$.
$*$ On a d'une part :

$$\begin{array}{rcll} \| T^{(K)}[h] \|^2_{0,0} & = & \varepsilon^2 \| \Pi^{(K)}(bh) \|^2_{0,0} & \\ & \leqslant & C\varepsilon^2 \| bh \|^2_{0,0} & \text{par } (S1) \\ & \leqslant & C\varepsilon^2 \displaystyle\sum_{(m,l)\in\mathbb{Z}^2} \| b_l h_{m-l} \|^2_{L^2(\mathcal{M},\mathbb{R})} & \\ & \leqslant & C\varepsilon^2 \displaystyle\sum_{(m,l)\in\mathbb{Z}^2} \| b_l \|^2_{L^\infty(\mathcal{M},\mathbb{R})} \| h_{m-l} \|^2_{L^2(\mathcal{M},\mathbb{R})} & \text{car } b_l \in H^{s_1} \hookrightarrow L^\infty \\ & \leqslant & C\varepsilon^2 \displaystyle\sum_{(m,l)\in\mathbb{Z}^2} \| b_l \|^2_{H^{s_1}(\mathcal{M},\mathbb{R})} \| h_{m-l} \|^2_{L^2(\mathcal{M},\mathbb{R})} & \\ & \leqslant & C\varepsilon^2 \| b \|^2_{\widetilde{s}} \| h \|^2_{0,0} & \text{car } \widetilde{s} > \frac{1}{2} \end{array}$$

Ainsi

$$\| T^{(K)} \|_{0,0} \leqslant C\varepsilon \| b \|_{\widetilde{s}} .$$

$*$ D'autre part, on souhaite inverser $D^{(K)}$. Par simplicité, on note $n=(j,k)$ les indices des fonctions propres et vecteurs propres que l'on a considérés. Soit $v = \sum_{(l,n)\in\mathbb{Z}^2} v_{l,n}e^{ilt}\varphi_n \in H^{0,0}$ et $h = \sum_{(l,n)\in\mathbb{Z}^2} h_{l,n}e^{ilt}\varphi_n \in H^{0,0}$ tels que $D^{(K)}[v]=h$.
Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{(l,n)\in\mathbb{Z}^2,|l|\leqslant K} h_{l,n}e^{ilt}\varphi_n &= h \\
&= D^{(K)}[v] \\
&= \Pi^{(K)}(\omega^2\partial_{tt} - \Delta + V(x))v \\
&= \sum_{(l,n)\in\mathbb{Z}^2,|l|\leqslant K} (-\omega^2 l^2 + \lambda_n^2) v_{l,n} e^{ilt}\varphi_n
\end{aligned}$$

Par unicité d'écriture, on en déduit que :

$$\boxed{(D^{(K)})^{-1}[h] = \sum_{(l,n)\in\mathbb{Z}^2,|l|\leqslant K} \frac{h_{l,n}}{-\omega^2 l^2 + \lambda_n^2} e^{ilt}\varphi_n} \ (\star)$$

On en déduit que :

$$\| (D^{(K)})^{-1}[h] \|_{0,0}^2 = \sum_{(l,n)\in\mathbb{Z}^2,|l|\leqslant K} \frac{|h_{l,n}|^2}{|-\omega^2 l^2 + \lambda_n^2|^2} \leqslant \sum_{(l,n)\in\mathbb{Z}^2,|l|\leqslant K} \frac{(1+|l|^\tau)^2 |h_{l,n}|^2}{\gamma^2} \leqslant 4K^{2\tau}\gamma^{-2} \| h \|_{0,0}^2 .$$

D'où $\| (D^{(K)})^{-1}[h] \|_{0,0} \leqslant 2K^\tau\gamma^{-1} \| h \|_{0,0}$, i.e.

$$\| (D^{(K)})^{-1} \|_{0,0} \leqslant 2K^\tau\gamma^{-1}.$$

Enfin, par application du lemme d'inversibilité préliminaire de la section 2, il vient que $\mathcal{L}^{(K)}(0)$ est inversible sur $H_{0,0}$ et que :

$$\| (\mathcal{L}^{(K)})^{-1} \|_{0,0} \leqslant 4K^\tau\gamma^{-1}.$$

Remarque fondamentale : C'est la formule $(\star)$ qui donne le lien avec la théorie KAM. On retrouve les petits diviseurs qui nécessitent l'emploi de conditions diophantiennes (précisément celles que l'on a introduites plus haut).

• On en déduit que $G^{(M)}_{\gamma,\mu,\mathcal{K}}(0) = G$ (intersection triviale).
Enfin, de la même manière que dans la preuve du premier résultat de la section 1 sur les vecteurs diophantiens, on a :

$$\forall \varepsilon \in [0,\varepsilon_0[, |G^c \cap ([0,\varepsilon[\times]\omega_1,\omega_2[)| \leqslant C\gamma\varepsilon.$$

b) Deuxième point

Lemme 3.11. *Il existe $\overline{\gamma}>0$ tel que pour tout $\gamma\in]0,\overline{\gamma}]$, pour tout $\forall\overline{K}>0$, il existe $\overline{\varepsilon}=\overline{\varepsilon}(\gamma,\overline{K})\in]0,\varepsilon_0]$ tel que pour tout $\varepsilon\in]0,\overline{\varepsilon}]$, pour tout $M\leqslant N\leqslant N'$, pour tout $u_1\in\mathcal{U}^{(N)}_{\overline{K}}, \forall u_2\in\mathcal{U}^{(N')}_{\overline{K}}$ tels que $\| u_2-u_1 \|_{s_0} \leqslant N^{-\sigma}$ on ait*

$$\left| \left(G^{(N')}_{\gamma,\mu,\mathcal{K}}(u_2)\right)^c \setminus \left(G^{(N)}_{\gamma,\mu,\mathcal{K}}(u_1)\right)^c \cap ([0,\varepsilon[\times\Lambda) \right| \leqslant C\frac{\gamma\varepsilon}{N}.$$

On renvoie à l'article [BBP09] pour la preuve (argument de théorie spectrale).

3.2 Résultats analogues pour d'autres EDP

On donne ici, à titre indicatif, deux autres résultats d'existence de solutions quasi-périodiques à certaines EDP obtenus plus récemment. Après ce stage, je m'intéresserai de plus près à ces résultats ; plus proches de mon travail futur en thèse.

3.2.1 NLS

Extrait de [BB11].
On s'intéresse à l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$i\partial_t u - \Delta u + V(x)u = \varepsilon f(\omega t, x, |u|^2)u + \varepsilon g(\omega t, x)$$

où $x \in \mathbb{T}^d$ ($d \in \mathbb{N}^*$), $\varepsilon > 0$, $V \in \mathcal{C}^q(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^d \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{C}^q(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^d, \mathbb{C})$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$ suffisamment grand) avec $-\Delta + V(x) \geqslant \beta_0 Id$ ($\beta_0 > 0$) et $\omega \in \mathbb{R}^\nu$ vérifiant la condition diophantienne suivante :

$$\omega = \lambda\overline{\omega},\ \lambda \in \Lambda := [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}],\ |\overline{\omega}| \leqslant 1$$

et il existe $\gamma_0 \in]0,1[$ et $\tau_0 > \nu - 1$ tels que :

$$\forall l \in \mathbb{Z}^\nu \backslash \{0\},\ |\langle \overline{\omega}, l\rangle| \geqslant \frac{2\gamma_0}{|l|^{\tau_0}}.$$

La recherche de solutions quasi-périodiques se ramène à la recherche de solutions $(2\pi)^{\nu+d}$-périodiques de :

$$i\omega \cdot \partial_\phi u - \Delta u + V(x)u = \varepsilon f(\varphi, x, |u|^2)u + \varepsilon g(\varphi, x)\ (\star)$$

dans l'échelle de Sobolev

$$H^s := H^s(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}^d, \mathbb{C}) = \left\{ u(\varphi, x) = \sum_{(l,j)\in\mathbb{Z}^\nu\times\mathbb{Z}^d} u_{l,j} e^{i(l\cdot\varphi + j\cdot x)} / \parallel u \parallel_s^2 := K_0 \sum_{k\in\mathbb{Z}^{\nu+d}} \langle k\rangle^{2s} |u_k|^2 < +\infty \right\}$$

avec $k := (l,j)$, $\langle k\rangle := \max(|l|, |j|, 1)$ et $|j| := \max(|j_1|, ..., |j_d|)$.

Théorème 3.12. *Il existe $s = s(\nu, d) > 0$ et $q = q(\nu, d) \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $V \in \mathcal{C}^q$ satisfaisant $-\Delta + V(x) \geqslant \beta_0 Id$, pour tout $f \in \mathcal{C}^q$ et pour tout $g \in \mathcal{C}^q$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ une application*

$$u \in \mathcal{C}^1([0, \varepsilon_0[\times\Lambda, H^s)$$

et un ensemble de Cantor $\mathcal{C}_\infty \subset [0, \varepsilon_0[\times\Lambda$ tels que :

- $\forall \lambda \in \Lambda, u(0, \lambda) = 0,$
- $\frac{|\mathcal{C}_\infty|}{\varepsilon_0} \underset{\varepsilon_0 \to 0}{\longrightarrow} 1$, *i.e. $\mathcal{C}_\infty$ est asymptotiquement de mesure pleine,*
- $\forall (\varepsilon, \lambda) \in \mathcal{C}_\infty$, *$u(\varepsilon, \lambda)$ est solution de* $(\star)$.

Si de plus f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $u(\varepsilon, \lambda)$ aussi.

Remarque : L'analyse est assez similaire à celle menée plus haut pour NLW mais en un peu plus technique (matrice Toeplitz à off-diagonale décroissante analogue au U de la partie précédente, etc...).

3.2.2 KdV/Airy

Extrait de [BBM14].
On s'intéresse à l'équation

$$\partial_t u + \partial_{xxx} u + \varepsilon f(\omega t, x, u, \partial_x u, \partial_{xx} u, \partial_{xxx} u) = 0$$

où $x \in \mathbb{T}$, $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{C}^q(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ ($\nu \in \mathbb{N}^*$) et $\omega \in \mathbb{R}^\nu$ satisfaisant la condition diophantienne suivante :

$$\omega = \lambda\overline{\omega},\ \lambda \in \Lambda := [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$$

et il existe $\gamma_0 \in]0,1[$ tel que :

$$\forall l \in \mathbb{Z}^\nu \backslash \{0\},\ |\langle \overline{\omega}, l\rangle| \geqslant \frac{3\gamma_0}{|l|^{\nu}}.$$

La recherche de solutions quasi-périodiques se ramène à la recherche de solutions $(2\pi)^{\nu+d}$-périodiques de :

$$\omega \cdot \partial_\phi u + \partial_{xxx} u + \varepsilon f(\varphi, x, u, \partial_x u, \partial_{xx} u, \partial_{xxx} u) = 0\ (\star)$$

dans l'échelle de Sobolev

$$H^s := H^s(\mathbb{T}^\nu \times \mathbb{T}, \mathbb{R}) := \left\{ u(\varphi, x) = \sum_{(l,j)\in\mathbb{Z}^\nu\times\mathbb{T}} u_{l,j} e^{i(l\cdot\varphi + jx)} / \overline{u_{l,j}} = u_{-l,-j} \text{ et } \parallel u \parallel_s^2 := \sum_{(l,j)\in\mathbb{Z}^\nu\times\mathbb{Z}} \langle l, j\rangle^{2s} |u_{l,j}|^2 < +\infty \right\}$$

où $\langle l, j\rangle := \max(1, |l|, |j|)$.

Théorème 3.13. *Il existe $s = s(\nu) > 0$, $q = q(\nu)$ et $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, \nu) > 0$ tels que si f est de la forme*

$$f = \partial_x(g(\omega t, x, u, \partial_x u, \partial_{xx} u))$$

et vérifie

$$f = f_0(\varphi, x, u, \partial_x u, \partial_{xx} u) + f_1(\varphi, x, u, \partial_x u, \partial_{xx} u)\partial_{xxx} u$$

avec, notant $z_0 = u$, $z_1 = \partial_x u$, $z_2 = \partial_{xx} u$ et $z_3 = \partial_{xxx} u$,

$$\partial_{z_2} f = \alpha(\varphi)\left(\partial^2_{z_3 x} f + z_1 \partial^2_{z_3 z_0} f + z_2 \partial^2_{z_3 z_1} f + z_3 \partial^2_{z_3 z_2} f\right),$$

alors pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, il existe un ensemble de Cantor $\mathcal{C}_\varepsilon \subset \Lambda$ tel que :

- $|\mathcal{C}_\varepsilon| \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 1$.
- *Pour tout $\lambda \in \mathcal{C}_\varepsilon$, il existe une solution $u(\varepsilon, \varphi) \in H^S$ de $(\star)$ telle que $\| u(\varepsilon, \varphi) \|_s \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$.*

Remarque : La non-linéarité étant du même ordre que la partie linéaire, l'analyse est plus compliquée que les précédentes. Dans le procédé de Nash-Moser, à chaque étape, on doit effectuer les changements de variables/conjugaisons par des opérateurs éventuellement pseudo-différentiels pour le ramener à une partie diagonale à coefficients constants et ainsi pouvoir mener l'analyse usuelle (Fourier+conditions diophantiennes), pour pouvoir inverser et avoir les estimées douces sur l'inverse.
Un travail similaire a été fait pour les water-waves [BBHM18].
C'est ce type de travail qui fera normalement l'objet d'une partie de ma thèse sur certaines équations issues de la mécanique des fluides.

Références

[AA67] V.I. Arnold et A. Avez. *Problèmes ergodiques de la mécanique classique.* 1967.

[AG91] S. Alinhac et P. Gérard. *Opéraeurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser.* 1991.

[Ar61] V.I. Arnold. *Small denominators : mappings of the circumference onto itself.* 1961.

[Be16] J. Bell. *Diophantine vectors.* 2016.

[BB11] M. Berti et P. Bolle. *Quasi-periodic solutions with Sobolev regularity of NLS on $\mathbb{T}^d$ with a multiplicative potential.* 2011.

[BBHM18] P. Baldi, M. Berti, E. Haus et R. Montalto. *Time quasi-periodic gravity water waves in finite depth.* 2018.

[BBM14] P. Baldi, M. Berti et R. Montalto. *KAM for quasi-linear and fully nonlinear forced perturbations of Airy equation.* 2014.

[BBP09] M. Berti, P. Bolle et M. Procesi. *An abstract Nash-Moser theorem with parameters and applications to PDEs.* 2009.

[CR71] M.G. Crandall et P.H. Rabinowitz. *Bifurcation from simple eigenvalues.* 1971.

[DHR18] D. Dritschel, T. Hmidi et C. Renault. *Imperfect bifurcation for the quasi-geostrophic shallow-water equations.* 2018.

[G07] B. Grébert. *Birkhoff normal form and hamiltonian PDES.* 2007.

[Ho85] L. Hörmander. *On the Nash-Moser implicit function theorem.* 1985.

[HH14] Z. Hassaina et T. Hmidi. *On the V-states for the generalised quasi-geostrophic equations.* 2014.

[HMV12] T. Hmidi, J. Mateu et J.Verdera. *Boundary regularity of rotating votex patches.* 2012.

[Ki00] H. Kielhöfer. *Bifurcation theory : an introduction with applications to PDEs.* 2000.

[Ko54] A.N. Kolmogorov. *On observation of conditionally periodic motions under small perturbations of the hamiltonian.* 1954.

[Mo62] J. Moser. *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus.* 1962.

[W08] C.E. Wayne. *An Introduction to KAM Theory.* 2008.